Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2021
26. Juli 2021

Lineare Algebra
(Lehramt Gymnasium)

Klausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik
- ❏ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten befinden sich auf dem Papierstreifen, der an die Klausur angeheftet ist.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_3$ bestehend aus drei Elementen.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & \bar{2}x_3 & + & x_4 & = & \bar{2} \\ \bar{2}x_1 & + & \bar{2}x_2 & + & x_3 & & & = & \bar{0} \\ & & \bar{2}x_2 & & & + & x_4 & = & \bar{2} \\ \bar{2}x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & \bar{2} \end{array}$$

Geben Sie alle Elemente der Lösungsmenge $\mathscr{L} \subseteq \mathbb{F}_3^4$ einzeln an.

Lösung:

Durch Anwendung des Gauß-Algorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix entspricht dem linearen Gleichungssystem $x_1 = \bar{2} + x_3 + \bar{2}x_4$, $x_2 = \bar{1} + x_4$. Die Lösungsmenge des Systems ist also gegeben durch

$$\mathscr{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{2} + x_3 + \bar{2}x_4 \\ \bar{1} + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{F}_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{F}_3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Name: ____

Aufgabe 2. (3+2+2+3 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer *Äquivalenzrelation* auf einer Menge X an. (Dazu gehört auch, dass Sie die Definitionen der drei Eigenschaften angeben, die eine Äquivalenzrelation ausmachen.)

(b) Wie ist die *Äquivalenzklasse* eines Elements $x \in X$ bezüglich einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf X definiert?

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Laut Vorlesung sind die Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Äquivalenzklassen einer speziellen Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. Geben Sie diese Relation an.

(d) Berechnen Sie das eindeutig bestimmte Element $a \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ mit $\bar{5} \cdot a = \bar{6}$.

Lösung:

zu (a) Eine Relation $\sim$ auf X wird *Äquivalenzrelation* genannt, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Dabei bedeutet die *Reflexivität*, dass $x \sim x$ für alle $x \in X$ erfüllt ist. Die Relation $\sim$ ist nach Definition *symmetrisch*, wenn die Implikation $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ für alle $x, y \in X$ gilt, und *transitiv*, wenn die Implikation $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow x \sim z$ für alle $x, y, z \in X$ erfüllt ist.

zu (b) Sei $x \in X$. Die *Äquivalenzklasse* von x bezüglich $\sim$ ist gegeben durch $[x]_\sim = \{y \in X \mid x \sim y\}$.

zu (c) Es handelt sich um die Relation $\equiv_n$ gegeben durch

$$a \equiv_n b \quad \Leftrightarrow \quad n \mid (b - a)$$

für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

zu (d) Die Gleichung $\bar{5} \cdot a = \bar{6}$ kann zu $a = \bar{5}^{-1} \cdot \bar{6}$ umgeformt werden. Aus $\bar{5} \cdot \bar{8} = \overline{40} = \bar{1}$ folgt $\bar{5}^{-1} = \bar{8}$. Damit erhalten wir $a = \bar{8} \cdot \bar{6} = \overline{48} = \bar{9}$.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (4+2+4 Punkte)

Sei $V = \mathscr{M}_{2,\mathbb{C}}$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen 2×2-Matrizen und $B \in \mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}$ eine beliebige 2×3-Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\phi : \mathscr{M}_{2,\mathbb{C}} \to \mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}$, $A \mapsto AB$ eine lineare Abbildung gegeben ist.

(b) Begründen Sie, dass $U = \{A \in V \mid AB = 0_{\mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}}\}$ ein Untervektorraum von V ist.

(c) Weisen Sie nach, dass $W = \{A \in V \mid A^2 = 0_{\mathscr{M}_{2,\mathbb{C}}}\}$ *kein* Untervektorraum von V ist.

Lösung:

zu (a) Seien $A_1, A_2 \in \mathscr{M}_{2,\mathbb{C}}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\phi(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B = \phi(A_1) + \phi(A_2)$ und $\phi(\lambda A_1) = \lambda\phi(A_1)$.

zu (b) Es gilt $0_{\mathscr{M}_{2,\mathbb{C}}} \cdot B = 0_{\mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}}$ und somit $0_{\mathscr{M}_{2,\mathbb{C}}} \in U$. Seien nun $A_1, A_2 \in U$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt $A_1B = 0_{\mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}}$ und $A_2B = 0_{\mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}}$. Es folgt $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B = 0_{\mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}} + 0_{\mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}} = 0_{\mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}}$ und somit $A_1 + A_2 \in U$. Ebenso gilt $(\lambda A_1)B = \lambda(A_1B) = \lambda \cdot 0_{\mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}} = 0_{\mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}}$.

zu (c) Sei $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind A_1 und A_2 in W enthalten. Wäre W ein Untervektorraum von V, dann müsste auch $A_1 + A_2$ in W liegen. Es gilt aber

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit $A_1 + A_2 \notin W$.

Name: ____

Aufgabe 4. (2+5+3 Punkte)

Sei K ein Körper.

(a) Wie ist die *Dimension* eines endlich erzeugten K-Vektorraums definiert?

(b) Sei V ein K-Vektorraum, und sei $\{v_1, v_2\}$ eine zweielementige Teilmenge von V. Beweisen Sie die Gleichung $\mathrm{lin}\{v_1, v_2\} = \mathrm{lin}\{v_1 + v_2, v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\}$.

(c) Zeigen Sie: Ist $\{v_1 + v_2, v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\}$ eine dreielementige Teilmenge von V (die drei angegebenen Elemente also verschieden), so ist die Menge linear abhängig.

Lösung:

zu (a) Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und B eine Basis von V. Dann ist die Dimension von V definiert durch $\dim V = |B|$. (Je zwei Basen von V haben gleich viele Elemente.)

zu (b) „$\supseteq$" Wegen $v_1, v_2 \in \mathrm{lin}\{v_1, v_2\}$ und der Untervektorraum-Eigenschaft von $\mathrm{lin}\{v_1, v_2\}$ sind auch $v_1 + v_2$, $v_1 + 2v_2$ und $3v_1 - v_2$ in $\mathrm{lin}\{v_1, v_2\}$ enthalten. Es gilt also $\{v_1 + v_2, v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\} \subseteq \mathrm{lin}\{v_1, v_2\}$, und wiederum auf Grund der Untervektorraum-Eigenschaft von $\mathrm{lin}\{v_1, v_2\}$ folgt daraus $\mathrm{lin}\{v_1 + v_2, v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\} \subseteq \mathrm{lin}\{v_1, v_2\}$.

„$\subseteq$" Aus $v_1 + v_2, v_1 + 2v_2 \in \mathrm{lin}\{v_1 + v_2, v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\}$ folgt $v_2 = (v_1 + 2v_2) - (v_1 + v_2) \in \mathrm{lin}\{v_1 + v_2, v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\}$. Aus $v_1 + v_2, v_2 \in \mathrm{lin}\{v_1 + v_2, v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\}$ wiederum folgt $v_1 = (v_1 + v_2) - v_2 \in \mathrm{lin}\{v_1 + v_2, v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\}$. Es gilt also $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathrm{lin}\{v_1 + v_2, v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\}$, und daraus folgt $\mathrm{lin}\{v_1, v_2\} \subseteq \mathrm{lin}\{v_1 + v_2, v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\}$.

zu (c) Wegen $\mathrm{lin}\{v_1+v_2, v_1+2v_2, 3v_1-v_2\} = \mathrm{lin}\{v_1, v_2\}$ besitzt $\mathrm{lin}\{v_1+v_2, v_1+2v_2, 3v_1-v_2\}$ ein zweielementiges Erzeugendensystem. Daraus folgt $\dim \mathrm{lin}\{v_1+v_2, v_1+2v_2, 3v_1-v_2\} \leq 2$. In einem zweidimensionalen Vektorraum gibt es kein dreielementiges linear unabhängiges System.

Name: ____________________

Aufgabe 5. (3+4+3 Punkte)

(a) Sei $\phi : \mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^4$ eine surjektive lineare Abbildung.
Bestimmen Sie die Dimension von $\ker(\phi)$.

(b) Sei V ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien U, W zwei Untervektorräume von V mit $\dim U = 2$ und $\dim W = 3$. Begründen Sie, dass der Durchschnitt $U \cap W$ mindestens ein- und höchstens zweidimensional ist.

(c) Sei nun $V = \mathbb{R}^4$. Geben Sie jeweils konkrete Untervektorräume U und W von V an, so dass

(i) $\dim(U \cap W) = 1$ bzw. (ii) $\dim(U \cap W) = 2$

gilt. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

Lösung:

zu (a) Weil ϕ eine surjektive lineare Abbildung ist, gilt $\operatorname{im}(\phi) = \mathbb{R}^4$ und somit $\dim \operatorname{im}(\phi) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$. Mit dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen erhalten wir $\dim \ker(\phi) = \dim \mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{R}} - \dim \operatorname{im}(\phi) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$.

zu (b) Wegen $U + W \supseteq W$ gilt $\dim(U + W) \geq \dim(W) = 3$. Der Schnittdimensionssatz liefert $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \leq 2 + 3 - 3 = 2$. Andererseits ist $U + W \subseteq V$ und damit $\dim(U + W) \leq \dim(V) = 4$. Damit erhalten wir $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 2 + 3 - 4 = 1$.

zu (c) Seien $e_1, ..., e_4$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^4$. Setzen wir $U = \operatorname{lin}\{e_1, e_2\}$ und $W = \operatorname{lin}\{e_1, e_3, e_4\}$, dann gilt $U \cap W = \operatorname{lin}\{e_1\}$ und somit $\dim(U \cap W) = 1$. Definieren wir dagegen $U = \operatorname{lin}\{e_1, e_2\}$ und $W = \operatorname{lin}\{e_1, e_2, e_3\}$, dann folgt $U \cap W = \operatorname{lin}\{e_1, e_2\}$ und $\dim(U \cap W) = 2$.

Name: ____________________

Aufgabe 6. (6+4 Punkte)

Sei $V = \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen und sei $\phi : V \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} \\ a_{12} + a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachte in V die geordnete Basis $\mathscr{A} = (B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22})$ gegeben durch die vier Basismatrizen, und in $\mathbb{R}^3$ die geordnete Basis

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(a) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(\phi) \in \mathscr{M}_{3\times 4,\mathbb{R}}$.

(b) Sei $A \in V$ mit $\Phi_{\mathscr{A}}(A) = (1, 2, 3, 4)$. Berechnen Sie $\Phi_{\mathscr{B}}(\phi(A))$ und $\phi(A)$.

In Teil (b) bezeichnen $\Phi_{\mathscr{A}} : V \to \mathbb{R}^4$ und $\Phi_{\mathscr{B}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wie immer die Koordinatenabbildungen bezüglich der Basen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$.

Lösung:

zu (a) Es gilt

$$\phi(B_{11}) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(B_{12}) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(B_{21}) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(B_{22}) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Darstellungsmatrix ist also gegeben durch

$$\mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(\phi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

zu (b) Es gilt

$$\Phi_{\mathscr{B}}(\phi(A)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\phi(A) = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Name: ____

Aufgabe 7. (6+4 Punkte)

(a) Es sei $\mathbb{F}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \alpha, \alpha+\bar{1}\}$ ein Körper bestehend aus vier Elementen, wobei $\bar{0}$ das Null- und $\bar{1}$ das Einselement des Körpers bezeichnet. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{F}_4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \alpha & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \alpha+\bar{1} \\ \alpha & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $\alpha(\alpha+\bar{1}) = \bar{1}$ und $\beta + \beta = \bar{0}$ für alle $\beta \in \mathbb{F}_4$ gilt.

(b) Wir betrachten die Matrix $B \in \mathscr{M}_{5,\mathbb{Q}}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Laut Vorlesung ist die Determinante von B gegeben durch die Leibniz-Formel $\det(B) = \sum_{\sigma \in S_5} s_\sigma$ mit $s_\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot b_{1,\sigma(1)} \cdot b_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot b_{5,\sigma(5)}$ für alle $\sigma \in S_5$. Geben Sie die eindeutig bestimmte Permutation $\sigma \in S_5$ mit $s_\sigma \neq 0$ an, und berechnen Sie den Summanden s_σ.

Lösung:

zu (a) Wir berechnen die Determinante mit Hilfe der Sarrus-Regel.

$$\det \begin{pmatrix} \bar{0} & \alpha & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \alpha+\bar{1} \\ \alpha & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \bar{0}\cdot\bar{1}\cdot\bar{1} + \alpha\cdot(\alpha+\bar{1})\cdot\alpha + \bar{1}\cdot\bar{1}\cdot\bar{0} - \alpha\cdot\bar{1}\cdot\bar{1} - \bar{0}\cdot(\alpha+\bar{1})\cdot\bar{0} - \bar{1}\cdot\bar{1}\cdot\alpha$$
$$= 0 + 1\cdot\alpha + \bar{0} - \alpha - \bar{0} - \alpha = -\alpha = \alpha.$$

zu (b) Die eindeutig bestimmte Permutation σ mit $s_\sigma \neq \bar{0}$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 4) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 4)(2\ \ 5) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= (1\ \ 4)(2\ \ 5)(3\ \ 4) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ \ 4)(2\ \ 5)(3\ \ 4)(4\ \ 5).$$

Da σ ein Produkt aus vier Transpositionen ist, gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^4 = 1$. Der gesuchte Summand s_σ ist somit $s_\sigma = 1 \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \cdot b_{3\sigma(3)} \cdot b_{4\sigma(4)} \cdot b_{5\sigma(5)} = 1 \cdot b_{14} \cdot b_{25} \cdot b_{31} \cdot b_{42} \cdot b_{53} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

Name: ____________________

Aufgabe 8. (2+4+4 Punkte)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ und $v \in K^n$. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit v ein Eigenvektor von A ist?

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der folgenden reellen 3×3-Matrix.

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 20 & -17 & 40 \\ 8 & -8 & 19 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und geben Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{R}}$ an, die ähnlich zu A ist.

Lösung:

zu (a) Es muss $v \neq 0_{K^n}$ gelten und ein $\lambda \in K$ mit $Av = \lambda v$ existieren.

zu (b) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\chi_A \quad = \quad \det \begin{pmatrix} x-5 & 2 & -4 \\ -20 & x+17 & -40 \\ -8 & 8 & x-19 \end{pmatrix} \quad = \quad (x-5)(x+17)(x-19) + 2 \cdot (-40) \cdot (-8) + (-4) \cdot (-20) \cdot 8$$

$$-(-8) \cdot (x+17) \cdot (-4) - 8 \cdot (-40) \cdot (x-5) - (x-19) \cdot (-20) \cdot 2 \quad = \quad x^3 - 7x^2 + 15x - 9.$$

Durch probeweises Einsetzen findet man die Nullstelle 1, und Polynomdivision liefert $\chi_A = (x-1)(x-6x+9) = (x-1)(x-3)^2$. Dies zeigt, dass 1 und 3 die einzigen Eigenwerte von A sind.

zu (c) Die Gleichung $\chi_A = (x-1)(x-3)^2$ zeigt, dass A über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt, und dass die algebraischen Vielfachheiten durch $\mu_a(A,1) = 1$ und $\mu_a(A,3) = 2$ gegeben sind. Für jeden Eigenwert λ gilt laut Vorlesung $1 \leq \mu_g(A,\lambda) \leq \mu_a(A,\lambda)$. Insbesondere gilt also $\mu_g(A,1) = \mu_a(A,1) = 1$. Die Rechnung

$$A - 3E_3 \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 20 & -20 & 40 \\ 8 & -8 & 16 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zeigt, dass $\mathrm{rg}(A - 3E_3) = 1$ und somit $\mu_g(A,3) = \dim \mathrm{Eig}(A,3) = \dim \ker(A - 3E_3) = 3 - \mathrm{rg}(A - 3E_3) = 3 - 1 = 2 = \mu_a(A,3)$ gilt (wobei im dritten Schritt der Dimensionssatz für lineare Abbildungen verwendet wurde). Insgesamt sind damit die Bedingungen des Diagonalisierbarkeitskriteriums erfüllt, und folglich ist A diagonalisierbar. Die Gleichungen $\mu_g(A,1) = 1$ und $\mu_g(A,3) = 2$ zeigen, dass eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus einem Eigenvektor zum Eigenwert 1 und zwei Eigenvektoren zum Eigenwert 3 existiert. Folglich ist A ähnlich zur Diagonalmatrix

$$D \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$