LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2021
22. Juli 2021

Lineare Algebra
(Lehramt Gymnasium)

Klausur

Nachname: ____________ Vorname: ____________

Matrikelnr.: ____________

Studiengang:
- ❑ Lehramt Gymnasium
- ❑ Bachelor Wirtschaftspädagogik
- ❑ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten befinden sich auf dem Papierstreifen, der an die Klausur angeheftet ist.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt, und lassen Sie die Rückseiten unbeschriftet.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_7$ mit sieben Elementen.

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{3}x_1 & + & \bar{5}x_2 & + & x_3 & = & \bar{2} \\ \bar{4}x_1 & + & \bar{4}x_2 & + & \bar{2}x_3 & = & \bar{5} \\ x_1 & & & + & \bar{6}x_3 & = & \bar{3} \end{array}$$

Geben Sie alle Elemente der Lösungsmenge $\mathscr{L} \subseteq \mathbb{F}_7^3$ dieses LGS einzeln an.

Lösung:

Wir bilden die erweiterte Koeffizientenmatrix und führen den Gauß-Algorithmus durch.

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{5} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{5} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{5} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{5} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{5} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{6} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{5} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{5} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{5} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix entspricht dem Gleichungssystem $x_1 = \bar{3} + x_3$, $x_2 = \bar{2}x_3$. Damit erhalten wir die Lösungsmenge

$$\mathscr{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{3} + x_3 \\ \bar{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{F}_7 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{F}_7 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{5} \\ \bar{4} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{6} \\ \bar{6} \\ \bar{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{3} \\ \bar{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{5} \\ \bar{6} \end{pmatrix} \right\}.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (4+3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Kehrwert $\overline{28}^{-1}$ des Elements $\overline{28} \in \mathbb{F}_{17}$.

(b) Laut Vorlesung sind die Elemente des Rings $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ bestimmte Teilmengen von $\mathbb{Z}$. Welche Teilmengen sind das? Geben Sie diese an.

(c) Begründen Sie, dass $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ kein Körper ist.

Lösung:

zu (a) Zunächst gilt $\overline{28} = \overline{11}$. Es ist $\overline{11} \cdot \bar{3} = \overline{33} = -\bar{1}$ und somit $\overline{11} \cdot (-\bar{3}) = -(-\bar{1}) = \bar{1}$. Daraus folgt $\overline{28}^{-1} = \overline{11}^{-1} = -\bar{3} = \overline{14}$. (Diesen Kehrwert erhält man natürlich auch durch die Gleichung $\overline{11} \cdot \overline{14} = \overline{154} = \bar{1}$, aber die Gleichung $\overline{11} \cdot \bar{3} = \overline{33} = -\bar{1}$ findet man schneller.)

zu (b) Es handelt sich um die Teilmengen von $\mathbb{Z}$ gegeben durch $k + 10\mathbb{Z} = \{k + 10m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, wobei k die Werte $0, 1, 2, ..., 9$ durchläuft.

zu (c) Die Elemente $\bar{2}$ und $\bar{5}$ in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sind beide ungleich null, es gilt aber $\bar{2} \cdot \bar{5} = \overline{10} = \bar{0}$. In einem Körper muss das Produkt zweier Elemente ungleich null aber ebenfalls ungleich null sein. Dies zeigt, dass $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ kein Körper ist. (Man konnte auch den Satz aus der Vorlesung zitieren, welcher besagt, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$ genau dann ein Körper ist, wenn n eine Primzahl ist.)

Name: ____

Aufgabe 3. (4+3+3 Punkte)

Wir betrachten auf $V = \mathbb{C}^2$ die Abbildung $\phi : V \to V$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 + \bar{z}_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.
Außerdem sei $U \subseteq V$ gegeben durch

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \right\}.$$

(Ist $z_2 = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann bezeichnet $\bar{z}_2$ jeweils die zu z_2 konjugiert-komplexe Zahl, d.h. es ist $\bar{z}_2 = a - ib$.)

(a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist, wenn man V als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet, mit der üblichen komponentenweisen Addition als Vektoraddition und der skalaren Multiplikation gegeben durch

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \quad , \qquad \left(\lambda, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem (ohne Begründung) die Dimension von U an.

(b) Weisen Sie nach, dass ϕ eine lineare Abbildung ist, wenn man V wie in Teil (a) als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet.

(c) Zeigen Sie, dass ϕ *keine* lineare Abbildung ist, wenn man V auf die gewöhnliche Weise als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet.

Lösung:

zu (a) Wegen $\mathrm{Re}(0) = 0 = \mathrm{Im}(0)$ gilt $0_{\mathbb{C}^2} = (0,0) \in U$. Seien nun $(z_1, z_2) \in U$, $(z_3, z_4) \in U$ (mit $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$) und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$ und $\mathrm{Re}(z_3) = \mathrm{Im}(z_4)$. Es folgt $\mathrm{Re}(z_1 + z_3) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_3) = \mathrm{Im}(z_2) + \mathrm{Im}(z_4) = \mathrm{Im}(z_2 + z_4)$ und somit $(z_1, z_2) + (z_3, z_4) = (z_1 + z_3, z_2 + z_4) \in U$. Ebenso gilt $\mathrm{Re}(\lambda z_1) = \lambda \mathrm{Re}(z_1) = \lambda \mathrm{Im}(z_2) = \mathrm{Im}(\lambda z_2)$ und somit $\lambda(z_1, z_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2) \in U$.

zu (b) Seien $(z_1, z_2), (z_3, z_4) \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}\phi\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}\right) &= \phi\left(\begin{pmatrix} z_1 + z_3 \\ z_2 + z_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z_1 + z_3 + \overline{z_2 + z_4} \\ z_2 + z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + \bar{z}_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_3 + \bar{z}_4 \\ z_4 \end{pmatrix} \\ &= \phi\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) + \phi\left(\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

und ebenso

$$\phi\left(\lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda z_1 + \overline{\lambda z_2} \\ \lambda z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 + \lambda \bar{z}_2 \\ \lambda z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 + \bar{z}_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \lambda \phi\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right).$$

zu (c) Wäre ϕ eine lineare Abbildung auf V als $\mathbb{C}$-Vektorraum, dann müsste insbesondere $\phi(iv) = i\phi(v)$ für alle $v \in V$ gelten. Für den Vektor $e_2 = (0,1)$ gilt aber einerseits $\phi(i(0,1)) = \phi(0,i) = (-i,i)$, und andererseits $i\phi(0,1) = i(1,1) = (i,i)$, also $\phi(ie_2) \neq i\phi(e_2)$.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (2+3+5 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Geben Sie die Definition von $\mathrm{lin}(S)$ an.

(b) Geben Sie eine fünfelementige Teilmenge S des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ an, so dass $\dim \mathrm{lin}(S) = 2$ gilt. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

(c) Zeigen Sie: Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\{v, w\}$ eine zweielementige, linear unabhängige Teilmenge von V, dann besteht auch die Menge $\{v+2w, 3v+4w\}$ aus zwei verschiedenen Elementen und ist ebenfalls linear unabhängig.

Lösung:

zu (a) Die Menge $\mathrm{lin}(S)$ ist definiert durch

$$\mathrm{lin}(S) \quad = \quad \left\{ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k \;\middle|\; r \in \mathbb{N}_0 \ , \ v_1, ..., v_r \in S \ , \ \lambda_1, ..., \lambda_r \in K \right\}.$$

zu (b) Eine solche Menge ist zum Beispiel gegeben durch $S = \{(1,0,0), (2,0,0), (0,1,0), (0,2,0), (1,1,0)\}$.

zu (c) Es genügt zu zeigen, dass das Tupel $(v+2w, 3v+4w)$ linear unabhängig ist. Daraus folgt laut Vorlesung, dass die Elemente $v+2w, 3v+4w$ verschieden und dass die Menge $\{v+2w, 3v+4w\}$ linear unabhängig ist. Für den Nachweis seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda(v+2w) + \mu(3v+4w) = 0_V$ vorgegeben. Zu zeigen ist $\lambda = \mu = 0$. Aus der Voraussetzung folgt $(\lambda + 3\mu)v + (2\lambda + 4\mu)w = 0_V$. Weil $\{v, w\}$ linear unabhängig ist, erhalten wir $\lambda + 3\mu = 0$ und $2\lambda + 4\mu = 0$. Subtraktion des zweifachen der ersten Gleichung von der zweiten liefert $(-2)\mu = 0$ und $\mu = 0$. Einsetzen in die Gleichung $\lambda + 3\mu = 0$ liefert $\lambda = 0$, insgesamt also $\lambda = \mu = 0$.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (4 + 6 Punkte)

(a) Seien U, W Untervektorräume des $\mathbb{R}^5$ mit $\dim U = 3$, $\dim W = 4$ und $U + W = \mathbb{R}^5$. Bestimmen Sie die Dimension des Durchschnitts $U \cap W$.

(b) Begründen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen, dass es keine injektive lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ gibt.

Lösung:

zu (a) Laut Schnittdimensionssatz gilt $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 3 + 4 - \dim \mathbb{R}^5 = 3 + 4 - 5 = 2$.

zu (b) Angenommen, $\phi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ ist eine injektive, lineare Abbildung. Auf Grund der Injektivität gilt $\ker(\phi) = \{0_{\mathbb{R}^6}\}$ und $\dim \ker(\phi) = 0$. Wegen $\mathrm{im}(\phi) \subseteq \mathbb{R}^4$ gilt $\dim \mathrm{im}(\phi) \leq \dim \mathbb{R}^4 = 4$. Der Dimensionssatz für lineare Abbildungen liefert andererseits $\dim \mathrm{im}(\phi) = \dim \mathbb{R}^6 - \dim \ker(\phi) = 6 - 0 = 6 > 4$, im Widerspruch zu unserer vorherigen Feststellung. Also ist die Annahme falsch, und es existiert keine solche injektive Abbildung.

Name: ____

Aufgabe 6. (7+3 Punkte)

(a) Wir betrachten den Untervektorraum U des $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Auf diesem sind durch

$$\mathscr{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

geordnete Basen definiert. (Das braucht nicht gezeigt werden.) Berechnen Sie das Bild des Vektors $v = (2, 5, -7) \in U$ unter der linearen Abbildung $\phi : U \to U$ gegeben durch $\phi = \mathscr{L}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(A)$ mit der Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei nun V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine geordnete Basis von V. Es sei ϕ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft, dass v_3 ein Eigenvektor von ϕ zum Eigenwert 5 ist. Welcher Teil der Darstellungsmatrix $\mathscr{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(\phi) \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{R}}$ ist durch diese Bedingung festgelegt, und wie sieht dieser Teil der Matrix aus? Eine Begründung ist hier *nicht* erforderlich.

Lösung:

zu (a) Wir bezeichnen die Vektoren von $\mathscr{A}$ mit v_1, v_2 und die Vektoren von $\mathscr{B}$ mit w_1, w_2. An den Spalten der Matrix A kann abgelesen werden, dass

$$\phi(v_1) \quad = \quad (-1) \cdot w_1 + 3 \cdot w_2 \quad = \quad (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und

$$\phi(v_2) \quad = \quad (-1) \cdot w_1 + 3 \cdot w_2 \quad = \quad 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Der Vektor v hat die Darstellung

$$v \quad = \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad = \quad 2v_1 + 5v_2.$$

als Linearkombination von $\mathscr{A}$. Auf Grund der Linearität von ϕ gilt also

$$\phi(v) \quad = \quad 2 \cdot \phi(v_1) + 5 \cdot \phi(v_2) \quad = \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -49 \\ 52 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

zu (b) Dass v_3 ein Eigenvektor von ϕ zum Eigenwert 5 ist, bedeutet, dass $\phi(v_3)$ die Darstellung $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 5 \cdot v_3$ als Linearkombination von $\mathscr{B}$ besitzt. Daraus folgt, dass die dritte Spalte von $\mathscr{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(\phi)$ mit dem Vektor $(0, 0, 5)$ übereinstimmt.

Name: ____________________

Aufgabe 7. (6+4 Punkte)

(a) Berechnen Sie mit dem Gauß-Verfahren die Determinante der folgenden Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{F}_{11}}$ über dem Körper $\mathbb{F}_{11}$.

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{9} \\ \bar{2} & \bar{7} & \overline{10} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

(Eine Berechnung der Determinante auf anderem Weg, zum Beispiel mit der Sarrus-Regel, wird hier nicht als Lösung akzeptiert und bringt keine Punkte.)

(b) Stellen Sie das folgende Element $\sigma \in S_7$ als Produkt von Transpositionen dar, und berechnen Sie das Signum $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

zu (a) Die Anwendung des Gauß-Algorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{9} \\ \bar{2} & \bar{7} & \overline{10} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{9} \\ \bar{0} & \bar{8} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{5} & \bar{8} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{9} \\ \bar{0} & \bar{1} & \overline{10} \\ \bar{0} & \bar{5} & \bar{8} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{9} \\ \bar{0} & \bar{1} & \overline{10} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}$$

Bezeichnen wir die letzte Matrix mit A', dann gilt $\det(A') = \bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{2} = \bar{2}$. Im zweiten Schritte wurde die zweite Zeile mit $\bar{7}$ multipliziert, alle übrigen Umformungen hatten keine Auswirkung auf die Determinante. Es gilt somit $\det(A') = \bar{7} \cdot \det(A)$ und $\det(A) = \bar{7}^{-1} \cdot \det(A) = \bar{8} \cdot \bar{2} = \overline{16} = \bar{5}$.

zu (b) Wir wenden das aus der Vorlesung bekannte Verfahren an, um σ als Produkt von Transpositionen darzustellen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (1\ \ 3) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)(2\ \ 3) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ \ 3)(2\ \ 3)(4\ \ 6) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)(2\ \ 3)(4\ \ 6)(6\ \ 7)$$

Da σ als Produkt von vier Transpositionen dargestellt werden kann, gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^4 = 1$.

Name: ____________________

Aufgabe 8. (2+3+5 Punkte)

(a) Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Was bedeutet es *nach Definition*, dass ein Endomorphismus ϕ von V diagonalisierbar ist? (Bitte beachten, dass hier nach der Definition gefragt ist, nicht nach einem äquivalenten Kriterium.)

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{F}_5}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{2} \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie für jeden Eigenwert der Matrix A einen zugehörigen Eigenvektor.

Lösung:

zu (a) Es bedeutet, dass eine geordnete Basis $\mathscr{B}$ von V existiert mit der Eigenschaft, dass $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\phi)$ eine Diagonalmatrix ist.

zu (b) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-\bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{3} & x & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{1} & x-\bar{2} \end{pmatrix} = x(x-\bar{1})(x-\bar{2}) + \bar{0}\cdot\bar{2}\cdot\bar{3} + \bar{2}\cdot\bar{3}\cdot\bar{1}$$

$$-\bar{3}\cdot x\cdot\bar{2} - \bar{1}\cdot\bar{2}\cdot(x-\bar{1}) - (x-\bar{2})\cdot\bar{3}\cdot\bar{0} = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{3}.$$

Durch probeweises Einsetzen findet man die Nullstellen $\bar{1}$, $\bar{3}$ und $\bar{4}$. Also sind dies die Eigenwerte der Matrix A.

zu (c) Zunächst bestimmen wir einen Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{1}$.

$$A - \bar{1}\cdot E_3 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix entspricht dem Gleichungssystem $x_1 = \bar{3}x_2$ und $x_3 = \bar{0}$. Dieses besitzt die Lösung $(\bar{3}, \bar{1}, \bar{0})$, also ist dies ein Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{1}$. Für den Eigenwert $\bar{3}$ liefert die Rechnung

$$A - \bar{3}\cdot E_3 = \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

den Eigenvektor $(\bar{4}, \bar{2}, \bar{1})$. Für den Eigenwert $\bar{4}$ erhalten wir schließlich durch

$$A - \bar{4}\cdot E_3 = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

den Eigenvektor $(\bar{1}, \bar{0}, \bar{1})$.