Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2021
12. Oktober 2021

Lineare Algebra

(Lehramt Gymnasium)

Nachholklausur

Nachname: ____________ Vorname: ____________

Matrikelnr.: ____________

Studiengang:
- ❑ Lehramt Gymnasium
- ❑ Bachelor Wirtschaftspädagogik
- ❑ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten befinden sich auf dem Papierstreifen, der an die Klausur angeheftet ist.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ der Körper mit zwei Elementen. Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{F}_2$ die Lösungsmenge $\mathscr{L}_a \subseteq \mathbb{F}_2^3$ des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & x_3 & = & a \\ x_1 & + & ax_2 & & & = & \bar{0} \\ x_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & = & \bar{0} \end{array}$$

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (2+2+2+4 Punkte)

(a) Sei X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$ ein beliebiges Element. Wie ist die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ von x bezüglich $\sim$ definiert?

(b) Ist es möglich, dass für zwei Elemente $x, y \in X$ zwar $x \neq y$, aber $[x]_\sim = [y]_\sim$ gilt? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für X, $\sim$, x und y an, bei dem das der Fall ist. (Ein Nachweis der Gleichung $[x]_\sim = [y]_\sim$ für das Beispiel ist aber *nicht* erforderlich.)

(c) Wie in der Vorlesung bezeichnet $\equiv_6$ die Kongruenzrelation modulo 6 auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Geben Sie (ohne Nachweis) die Elemente der Äquivalenzklasse von 7 bezüglich $\equiv_6$ an.

(d) Bestimmen Sie alle Elemente des Restklassenrings $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, die einen Kehrwert besitzen, und geben Sie den Kehrwert jeweils an. Auch hier ist *kein* Nachweis erforderlich.

Name: ____

Aufgabe 3. (3+3+4 Punkte)

(a) Geben Sie eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^2$ an, so dass U mit der auf U eingeschränkten Vektoraddition des $\mathbb{R}^2$ eine Gruppe, aber kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

(b) Wir betrachten auf der Menge $\mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ die Verknüpfung $*$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{für alle} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}.$$

Entscheiden Sie, ob $(\mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}, *)$ eine Gruppe ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(c) Nun betrachten wir die Menge $\mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgende Teilmenge $V \subseteq \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ ein Untervektorraum von $\mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ ist.

$$V \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}} \;\middle|\; a_{11} + a_{22} = 0 \right\}$$

Name: ____________________

Aufgabe 4. (4+3+3 Punkte)

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der $\mathbb{C}^3$ sowohl als $\mathbb{C}$- als auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst werden kann. Geben Sie je zwei verschiedene Basen von $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{C}$- bzw. als $\mathbb{R}$-Vektorraum an (insgesamt also vier Basen). Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

(b) Sei nun V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $v_1, v_2 \in V$ zwei verschiedene Elemente. Beweisen Sie die Gleichung $\text{lin}\{v_1 - v_2, v_2\} = \text{lin}\{v_1 + v_2, v_1 - 2v_2\}$.

(c) Nun sei $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine dreielementige linear unabhängige Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass dann auch $\{w_1 + w_2, w_1 + w_3, w_2 + w_3\}$ eine dreielementige linear unabhängige Teilmenge von V ist.

Name: ____________________

Aufgabe 5. (2+4+4 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Geben Sie die Definition des Zeilen- und des Spaltenrangs einer Matrix $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ an, und formulieren Sie den Rangsatz.

(b) Bestimmen Sie die Dimension des Untervektorraums $V \subseteq \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ aus Aufgabe 3 (c),

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11} + a_{22} = 0 \right\} ,$$

durch Anwendung des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen.

(c) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 8. Zeigen Sie, dass es keine Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ mit $\dim U_i = 7$ für $1 \le i \le 3$ und $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 4$ gibt.

Name: ____________________

Aufgabe 6. (2+4+4 Punkte)

Auch in dieser Aufgabe betrachten wir den Untervektorraum $V \subseteq \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}} \mid a_{11} + a_{22} = 0 \right\}.$$

Ohne Beweis darf verwendet werden, dass durch

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

eine geordnete Basis von V gegeben ist.

(a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $\Phi_{\mathscr{B}}\left(\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \right)$.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\mathscr{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{E}}(\phi)$ der linearen Abbildung

$$\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a+b, c+d) \quad ,$$

wobei $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ die Einheitsbasis des $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

(c) Sei nun $\psi : V \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung gegeben durch $\psi = \mathscr{L}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{E}}(A)$, mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Bild $\psi\left(\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \right)$.

Name: ____

Aufgabe 7. (4+3+3 Punkte)

(a) Sei $\mathbb{F}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \alpha, \alpha + \bar{1}\}$ der Körper mit vier Elementen, wobei $\bar{0}$ das Null- und $\bar{1}$ das Einselement des Körpers bezeichnet. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in \mathscr{M}_{4,\mathbb{F}_4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \alpha & \bar{1} \\ \bar{0} & \alpha & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \alpha + \bar{1} \\ \alpha & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $\alpha(\alpha + \bar{1}) = \bar{1}$ und $\beta + \beta = \bar{0}$ für alle $\beta \in \mathbb{F}_4$ gilt.

(b) Sei $\mathscr{B}$ eine geordnete Basis von $\mathbb{F}_4^4$ und $\phi : \mathbb{F}_4^4 \to \mathbb{F}_4^4$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\phi) = A$. Ist die Abbildung ϕ bijektiv? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Leibniz-Formel die Determinante der folgenden Matrix über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Name: ____

Aufgabe 8. (2+6+2 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Was bedeutet es nach Definition, dass ϕ diagonalisierbar ist?

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der folgenden Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{R}}$, und für jeden Eigenwert einen zugehörigen Eigenvektor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & -8 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(c) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.