Lineare Algebra

— Lösung Blatt 9 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Der Dimensionssatz für lineare Abbildungen besagt: Sind V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume, und ist $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann gilt $\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim \mathrm{im}(\phi)$. Die entspreche Aussage für Matrizen lautet: Ist $A \in \mathcal{M}_{m\times n,K}$, dann gilt $\dim \ker(A) + \mathrm{rg}(A) = n$. Diese Ausage erhält man, in dem man den Dimensionssatz auf die lineare Abbildung $\phi_A : K^n \to K^m$, gegeben durch Matrix-Vektor-Multiplikation $v \mapsto Av$, anwendet. Nach Definition gilt $\ker(A) = \ker(\phi_A)$. Das Bild $\mathrm{im}(\phi_A)$ ist genau der Spaltenraum $\mathrm{SR}(A)$, und dessen Dimension stimmt mit dem Rang $\mathrm{rg}(A)$ der Matrix überein.

zu (b) Die Spalten der Matrix A bilden ein Erzeugendensystem des Untervektorraums $U + W$, es gilt also $\mathrm{SR}(A) = U + W$ und $\mathrm{rg}(A) = \dim(U + W)$. Außerdem ist r die Anzahl der Basisvektoren von U und s die Anzahl der Basisvektoren von W, es gilt also $r = \dim(U)$ und $s = \dim(W)$. Mit dem Dimensionssatz für Matrizen und dem Schnittdimensionssatz erhält man $\dim \ker(A) = r + s - \mathrm{rg}(A) = r+s-\dim(U+W) = r+s-\dim U-\dim W+\dim(U\cap W) = (r+s)-r-s+\dim(U\cap W) = \dim(U\cap W)$.

zu (c) Es gilt $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{lin}\{(1, 2, 3, 4, 5)\} \subseteq \mathbb{R}^5$ und $\mathrm{SR}(A) = \mathrm{lin}\{(1, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Weil die beiden Vektoren in den Mengen jeweils ungleich Null sind, folgt $\mathrm{zr}(A) = \mathrm{sr}(A) = 1$.

zu (d) Der Rangsatz besagt nur, dass Zeilen- und Spaltenraum dieselbe Dimension haben. Das bedeutet aber nicht, dass die Vektorräume gleich sind, wie man zum Beispiel in Teil (a) sieht: Der Zeilenraum ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$, der Spaltenraum ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$. Also können diese beiden Räume nicht gleich sein.

Wenn Zeilen- und Spaltenraum einer Matrix $A \subseteq \mathcal{M}_{m\times n,K}$ gleich sind, dann müssen $\mathrm{ZR}(A) \subseteq K^n$ und $\mathrm{SR}(A) \subseteq K^m$ Untervektorräume desselben Vektorraums sein, also muss $m = n$ gelten. Die Übereinstimmung von Zeilen- und Spaltenraum ist also nur für quadratische Matrizen möglich. Die beiden Räume stimmen zum Beispiel überein, wenn A symmetrisch ist, also ${}^{\mathrm{t}}A = A$ gilt, denn dann ist $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{ZR}({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{SR}(A)$. Dies ist zum Beispiel für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

der Fall. Darüber hat auch jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ mit vollem Rang $\mathrm{rg}(A) = n$ diese Eigenschaft, denn dann gilt $\mathrm{ZR}(A) = K^n = \mathrm{SR}(A)$. Dies trifft zum Beispiel auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{zu.}$$

zu (e) Wegen $(3, -1, -2) = 1 \cdot (1, -1, 0) + 2 \cdot (1, 0, -1)$ gilt $\Phi_{\mathcal{B}}(3, -1, -2) = (1, 2)$. Aus $(-1, -2, 3) = 2 \cdot (1, -1, 0) + (-3) \cdot (1, 0, -1)$ folgt ebenso $\Phi_{\mathcal{B}}(-1, -2, 3) = (2, -3)$. Es ist $7 \cdot (1, -1, 0) + 7 \cdot (1, 0, -1) = (14, -7, -7)$, also ist $(14, -7, -7) \in U$ das eindeutig bestimmte Element mit $\Phi_{\mathcal{B}}(14, -7, -7) = (7, 7)$.

Aufgabe 1

Wir formen die Matrix mit dem Gauß-Algorithmus auf ZSF um.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 9 & 7 & 11 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix liegt in ZSF vor, und der Zeilenrang beträgt $r = 4$. Laut Vorlesung wird der Zeilenrang durch Äquivalenzumformungen nicht geändert und stimmt mit dem Rang der Matrix überein. Also gilt auch $\mathrm{rg}(A) = 4$.

Da die Spaltenzahl der Matrix $n = 6$ beträgt, gilt laut Vorlesung $\dim \ker(A) + \mathrm{rg}(A) = 6$, also $\dim \ker(A) = 6 - \mathrm{rg}(A) = 6 - 4 = 2$.

Aufgabe 2

„(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Laut Vorlesung gilt $\dim \ker(A) + \mathrm{rg}(A) = n$, und die Voraussetzung (i) liefert $\mathrm{rg}(A) = \dim SR(A) = \dim \ker(A)$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, so erhalten wir $n = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(A) = 2 \cdot \mathrm{rg}(A)$. Aus der Vorlesung ist außerdem bekannt, dass die Bilder $A(e_j)$ der Einheitsvektoren genau die Spalten der Matrix A sind. Also liegt $A(e_j)$ für $1 \leq j \leq n$ im Spaltenraum $SR(A)$. Wegen $SR(A) = \ker(A)$ folgt $A^2(e_j) = A(A(e_j)) = 0_{K^n}$ für $1 \leq j \leq n$. Dies zeigt, dass alle Spalten der Matrix A^2 gleich Null sind, also $A^2 = 0_{\mathcal{M}_{n,K}}$ gilt.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Aus $A^2 = 0$ folgt $A(A(e_j)) = 0$ für $1 \leq j \leq n$. Dies zeigt, dass jede Spalte $A(e_j)$ der Matrix A in $\ker(A)$ enthalten ist. Weil die Spalten von A ein Erzeugendensystem von $SR(A)$ bilden, und weil $\ker(A)$ ein Untervektorraum von K^n ist, folgt $SR(A) = \mathrm{lin}\{A(e_1), ..., A(e_n)\} \subseteq \ker(A)$. Aus $\dim \ker(A) + \mathrm{rg}(A) = n = 2 \cdot \mathrm{rg}(A)$ folgt außerdem $\dim \ker(A) = \mathrm{rg}(A) = \dim SR(A)$. Aus $SR(A) \subseteq \ker(A)$ und $\dim SR(A) = \dim \ker(A)$ wiederum folgt $\ker(A) = SR(A)$.

Aufgabe 3

Dem Verfahren aus der Vorlesung folgend, tragen wir die zunächst die Vektoren der beiden Basen als Spalten in eine Matrix ein und formen diese mit Hilfe des Gaußverfahrens auf normierte Zeilenstufenform um.

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

Die Kennzahlen der normierten ZSF lauten $r = 6$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$, $j_4 = 6$. Es ist also $S = \{4, 5\}$, und an der vierten und fünften Spalte können die Lösungsvektoren $b_4 = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0})$ und $b_5 = (\bar{2}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$ abgelesen werden. Nach Satz (10.13) ist $U \cap W$ somit zweidimensional, und die beiden Vektoren

$$\bar{1} \cdot u_1 + \bar{0} \cdot u_2 + \bar{0} \cdot u_3 = u_1 = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{2} \cdot u_1 + \bar{1} \cdot u_2 + \bar{0} \cdot u_3 = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $U \cap W$. (Die Linearkombinationen von u_1, u_2, u_3 werden jeweils mit den ersten drei Komponenten der Lösungsvektoren gebildet.)