Lineare Algebra

— Lösung Blatt 8 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die Dimension ist unendlich, wenn der K-Vektorraum V nicht endlich erzeugt ist. Ansonsten ist die Dimension die Elementezahl einer beliebigen Basis von V. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Einheitsvektoren $e_1, ..., e_n$ eine n-elementige Basis von K^n bilden. Deshalb gilt $\dim K^n = n$.

zu (b) Man kann leicht überprüfen, dass $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ eine vierelementige Basis von $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ mit der Zerlegung $z = a + ib$ und $w = c + id$ in Real- und Imaginärteil gilt nämlich

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} ,$$

was zeigt, dass die Menge tatsächlich ein Erzeugendensystem ist. Außerdem ist sie linear unabhängig, denn aus

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ folgt $(a + ib, c + id) = (0, 0)$, damit $a + ib = 0$ und $c + id = 0$ und daraus wiederum $a = b = c = d = 0$. Also ist $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum vierdimensional.

zu (c) Eine fünfelementige linear unabhängige Teilmenge in $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ gibt es nicht, denn laut Vorlesung gilt $\dim \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}} = 2 \cdot 2 = 4$, und nach (7.7) hat jede linear unabhängige Teilmenge somit höchstens vier Elemente. Erst recht kann es somit keine vierelementige Basis geben. Ein fünfelementiges Erzeugendensystem existiert dagegen. Denn laut Vorlesung bilden die Basismatrizen eine vierelementige Basis und damit auch ein vierelementiges Erzeugendensystem. Erweitert man diese Menge um ein beliebiges Element (zum Beispiel die Nullmatrix), so erhält man ein Erzeugendensystem mit fünf Elementen. Die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ist also ein fünfelementiges Erzeugendensystem von $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$.

zu (d) Nein, für $n = 3$ ist der Fall $\dim(E \cap E') = 0$ nicht möglich. Denn wegen $E + E' \subseteq \mathbb{R}^3$ ist $E + E'$ höchstens dreidimensional, und mit dem Schnittdimensionssatz folgt $\dim(E \cap E') = \dim E + \dim E' - \dim(E + E') \geq 2 + 2 - 3 = 1$. Im Fall $n = 4$ sieht die Sache anders aus: Bezeichnen e_1, e_2, e_3, e_4 die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^4$, dann sind $E = \mathrm{lin}\{e_1, e_2\} = \mathbb{R}^2 \times \{(0,0)\}$ und $E' = \mathrm{lin}\{e_3, e_4\} = \{(0,0)\} \times \mathbb{R}^2$ zweidimensional, aber $E \cap E' = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ und somit $\dim(E \cap E') = \dim\{0_{\mathbb{R}^4}\} = 0$.

zu (e) Der Kern von ϕ ist gegeben durch $\mathrm{lin}(e_2)$, denn für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$(x_1,x_2) \in \ker(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x_1,x_2) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1,0) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1,x_2) = (0,x_2)$$
$$\Leftrightarrow \quad (x_1,x_2) = x_2 e_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : (x_1,x_2) = \lambda e_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1,x_2) \in \mathrm{lin}(e_2).$$

Außerdem gilt $\mathrm{im}(\phi) = \phi(\mathbb{R}^2) = \{\phi(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(1, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}(e_1)$. Offenbar ist $\{e_2\}$ eine einelementige Basis von $\ker(\phi)$. (Dass $\{e_2\}$ ein Erzeugendensystem ist, folgt direkt aus der Gleichung $\ker(\phi) = \mathrm{lin}(e_2)$, und eine einelementige Menge bestehend aus nur einem Vektor ungleich dem Nullvektor ist laut Vorlesung linear unabhängig.) Es gilt also $\dim\ker(\phi) = 1$. Genauso folgt $\dim\mathrm{im}(\phi) = 1$ aus der Gleichung $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{lin}(e_1)$. Insgesamt erhalten wir $2 = \dim R^2 = \dim\ker(\phi) + \dim\mathrm{im}(\phi) = 1 + 1$, der Dimensionssatz ist für ϕ also gültig.

Aufgabe 1

zu (a) Sei $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4$. Dann gilt für alle $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ die Äquivalenz $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(phi) \Leftrightarrow \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \Leftrightarrow 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$, also ist $\ker(\phi) = U$ erfüllt. Es gilt $\mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}$. Ist nämlich $a \in \mathbb{R}$ vorgegeben, dann gilt $\phi(\frac{1}{5}a, 0, 0, 0) = 5 \cdot \frac{1}{5}a - 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = a$, also $a \in \mathrm{im}(\phi)$. Damit ist $\mathbb{R} \subseteq \mathrm{im}(\phi)$ nachgewiesen, und die umgekehrte Inklusion folgt direkt auf Grund des Wertebereits $\mathbb{R}$ von ϕ direkt aus der Definition des Bildes $\mathrm{im}(\phi)$. Der Dimensionssatz für lineare Abbildungen liefert nun $\dim\ker(\phi) = \dim\mathbb{R}^4 - \dim\mathrm{im}(\phi) = \dim\mathbb{R}^4 - \dim\mathbb{R} = 4 - 1 = 3$.

zu (b) Die angebene Menge U ist Lösungsmenge ein lineares Gleichungssystems bestehend aus einer Gleichung in 4 Variablen, die zu $x_1 = \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4$ umgestellt werden kann. Es folgt

$$
\begin{aligned}
U &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = \tfrac{1}{5}x_2 - \tfrac{2}{5}x_3 + \tfrac{3}{5}x_4\} = \{(\tfrac{1}{5}x_2 - \tfrac{2}{5}x_3 + \tfrac{3}{5}x_4, x_2, x_3, x_4) \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

Die Menge $B = \{(\frac{1}{5}, 1, 0, 0), (-\frac{2}{5}, 0, 1, 0), (\frac{3}{5}, 0, 0, 1)\}$ ist somit ein dreielementiges Erzeugendensystem von U. Zusammen mit der Angabe $\dim U = 3$ folgt daraus, B eine Basis von U ist.

zu (c) Wir wenden das Basisauswahlverfahren aus der Vorlesung auf die Teilmenge

$$E = \{(1, 2, 3, 3), (\tfrac{1}{5}, 1, 0, 0), (-\tfrac{2}{5}, 0, 1, 0), (\tfrac{3}{5}, 0, 0, 1)\}$$

des $\mathbb{R}^4$ an. Diese Menge ist wegen $E \supseteq B$ ein Erzeugendensystem von U. Für die Durchführung schreiben wir die Elemente von E als Spalten in eine Matrix und wenden das Gaußverfahren an; es genügt die Matrix auf (nicht normierte) Zeilenstufenform zu bringen, da nur die Kennzahlen der ZSF für das Ergebnis relevant sind.

$$
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto
\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 7 & -9 \\ 0 & 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}
$$

$$
\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \mapsto
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Die ZSF am Ende der Rechnung hat die Kennzahlen $r = 3$ und $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$. Satz (8.11) besagt nun, dass die ersten drei Vektoren aus E eine Basis von $U = \text{lin}(E) = \text{lin}(B)$ bilden. Die gesuchte Basis ist also

$$B' = \{(1,2,3,3), (\tfrac{1}{5},1,0,0), (-\tfrac{2}{5},0,1,0)\}.$$

Aufgabe 2

zu (a) Wegen $W \subseteq W + W' \subseteq V$ gilt einerseits $\dim(W + W') \geq \dim W = 5$ und andererseits $\dim(W + W') \leq \dim V = 7$. Mit dem Schnittdimensionssatz folgt daraus einerseits

$$\dim(W \cap W') = \dim W + \dim W' - \dim(W + W') = 5 + 5 - \dim(W + W') \geq 10 - 7 = 3$$

und andererseits

$$\dim(W \cap W') = \dim W + \dim W' - \dim(W + W') = 5 + 5 - \dim(W + W') \leq 10 - 5 = 5.$$

zu (b) Laut Vorlesung ist die Menge $B = \{e_1, e_2, ..., e_7\}$ der Einheitsvektoren linear unabhängig. Damit ist auch jede Teilmenge $S \subseteq B$ linear unabhängig, und folglich ist die Dimension des von S aufgespannten Untervektorraums $\text{lin}(S)$ jeweils gleich $|S|$.

Betrachten wir nun zunächst die Untervektorräume $W = \text{lin}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ und $W' = \text{lin}\{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Dann gilt auf Grund der Vorbemerkung $\dim W = 5$ und $\dim W' = 5$. Außerdem ist

$$W = \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 \mid x_1, ..., x_5 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 0, 0) \mid x_1, ..., x_5 \in \mathbb{R}\}$$

und $W' = \{(0, 0, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \mid x_3, ..., x_7 \in \mathbb{R}\}$ und somit

$$W \cap W' = \{(0, 0, x_3, x_4, x_5, 0, 0) \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Offenbar wird $W \cap W'$ von der dreielementigen, linear unabhängigen Menge $\{e_3, e_4, e_5\}$ aufgespannt, und somit gilt $\dim(W \cap W') = 3$.

Nun ersetzen wir W' durch den Untervektorraum $\text{lin}\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Auch danach gilt noch $\dim W' = 5$. Diesmal ist aber $W' = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, 0) \mid x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R}\}$ und somit

$$W \cap W' = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5, 0, 0) \mid x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Dieser Vektoraum wird von der vierelementigen, linear unabhängigen Menge $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$ aufgespannt, und folglich gilt $\dim(W \cap W') = 4$.

Zum Schluss setzen wir $W' = W$. Auch in diesem Fall gilt $\dim W' = 5$, nun aber ist $W \cap W' = W$ und somit $\dim(W \cap W') = \dim W = 5$.

Aufgabe 3

Wegen $\dim V = n$ gibt es eine n-elementige Basis $B = \{v_1, ..., v_n\}$ in V. Wir zeigen, dass durch

$$B' \quad = \quad \{(v_k, 0) \mid 1 \leq k \leq n\} \cup \{(0, v_k) \mid 1 \leq k \leq n\}$$

eine Basis von $V \times V$ gegeben ist. Um zu zeigen, dass B' ein Erzeugendensystem von V ist, sei ein beliebiges Element $(v, w) \in V \times V$ vorgegeben. Weil B eine Basis von V ist, gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ und $\mu_1, ..., \mu_n \in K$ mit $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$ und $w = \sum_{k=1}^n \mu_k v_k$. Es folgt

$$(v, w) \quad = \quad \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k, \sum_{k=1}^n \mu_k v_k \right) \quad = \quad \sum_{k=1}^n (\lambda_k v_k, 0) + \sum_{k=1}^n (0, \mu_k v_k) \quad = \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k (v_k, 0) + \sum_{k=1}^n \mu_k (0, v_k).$$

Dies zeigt, dass (v, w) in $\mathrm{lin}(B')$ enthalten ist. Um zu zeigen, dass B' linear unabhängig ist, seien $\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, ..., \mu_n \in K$ mit

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k (v_k, 0) + \sum_{k=1}^n \mu_k (0, v_k) \quad = \quad (0, 0).$$

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k v_k, 0) + \sum_{k=1}^n (0, \mu_k v_k) \quad = \quad (0, 0)$$

und es folgt

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k, 0 \right) + \left(0, \sum_{k=1}^n \mu_k v_k \right) \quad = \quad (0, 0)$$

also

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k, \sum_{k=1}^n \mu_k v_k \right) \quad = \quad (0, 0).$$

Durch Vergleich der beiden Komponenten links und rechts erhalten wir $\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0$ und $\sum_{k=1}^n \mu_k v_k = 0$. Weil B linear unabhängig ist, folgt $\lambda_k = 0$ für $1 \leq k \leq n$ und $\mu_k = 0$ für $1 \leq k \leq n$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit von B' nachgewiesen.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass B' eine Basis von V ist. Weil B' offenbar aus $2n$ Elementen besteht, erhalten wir $\dim(V \times V) = 2n$.