Wiederholung

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(i) Linearkombinationen eines Tupels $(v_1, \dots, v_r)$ $(r \in \mathbb{N},\ v_1, \dots, v_r \in V)$

= Vektoren der Form $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$

Menge der Linearkomb. des leeren Tupels $()$: $\{0_V\}$

(ii) Menge $\mathrm{lin}(S)$ der Linearkomb. einer Teilmenge $S \subseteq V$

= Menge der Linearkomb. von Tupeln $(v_1, \dots, v_r)$ mit $r \in \mathbb{N}_0$

und $v_i \in S$ für $1 \leq i \leq r$

$1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + (-1) \cdot (e_1 + e_2) = 0_V \Rightarrow$

$(e_1, e_2, e_1 + e_2)$ linear abhängig

(iii) Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ mit $r \in \mathbb{N},\ v_1, \dots, v_r \in V$ linear unabhängig

$\Leftrightarrow$ Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ gilt jeweils die Implikation

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0_V \Rightarrow \lambda_i = 0_K \text{ für } 1 \leq i \leq r.$$

(Das leere Tupel $()$ ist immer linear unabhängig.)

(iv) Teilmenge $S \subseteq V$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Jedes Tupel bestehend aus verschiedenen Elementen von S ist linear unabhängig.

(v) $B \subseteq V$ Basis von V $\Leftrightarrow$ B linear unabhängig und $V = \mathrm{lin}(B)$

(vi) geordnete Basis = Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ verschiedener Vektoren $v_i \in B$, so dass $\{v_1, \dots, v_r\}$ Basis von V

Globalübungsblatt 7

Aufgabe 1 V K-Vektorraum

zu (a) z.zg.: V hat nur einelementige Basen $\Leftrightarrow$ $\exists v \in V \setminus \{0_V\}$ mit $V = \text{lin}\{v\}$

„$\Rightarrow$" Nach Voraussetzung hat V eine einelementige Basis $\{v\}$, wobei $v \in V$.
Dann gilt $V = \text{lin}\{v\}$. Wäre $v = 0_V$, dann wäre $\{v\}$ linear abhängig, denn lt. Vl. ist jede Menge (oder jedes Tupel), das den Nullvektor 0_V enthält, linear abhängig. $\lightning$ zu $\{v\}$ Basis also: $\exists v \in V \setminus \{0_V\}$ mit $V = \text{lin}\{v\}$

Frage: Wenn $V = \{0_V\}$, ist dann $\{0_V\}$ linear abhängig?
Ja, denn das Tupel (0_V) ist linear abhängig, da $1_K \cdot 0_V = 0_V$ aber $1_K \neq 0_K$. (Beachte: $\{0_V\}$ ist hier keine Basis von V. Statt dessen ist $\emptyset$ eine Basis von $V = \{0_V\}$.)

„$\Leftarrow$" Vor.: $V = \text{lin}\{v\}$ für ein $v \in V \setminus \{0_V\}$
Dann ist $\{v\}$ eine einelem. Basis, denn wegen $v \neq 0_V$ ist $\{v\}$ linear unabhängig, und außerdem gilt $V = \text{lin}\{v\}$.
Basen mit null oder mehr als einem Element kann es nicht geben, denn $V = \text{lin}\{v\}$ ist endl. erzeugt, und je zwei Basen eines solchen K-Vektorraums sind gleich mächtig.

zu (b) Vor.: $\{v, w\}$ zweielementige Basis von V $(v \neq w)$

$w' \in V$ beliebig

z.zg.: $B' = \{v, w'\}$ ist Basis von V $\Leftrightarrow$ $\exists\, \lambda, \mu \in K$ mit $\mu \neq 0_K$

und $w' = \lambda v + \mu w$

„$\Rightarrow$" Vor.: $B' = \{v, w'\}$ ist Basis B Basis von V $\Rightarrow$ $V = \mathrm{lin}(B)$

$w' \in V$ $\Rightarrow$ w' ist Linearkomb. von B $\Rightarrow$ $\exists\, \lambda, \mu \in K$ mit

$w' = \lambda v + \mu w$ Ang. $\mu = 0_K$. $\Rightarrow$ $w' = \lambda v$ $\Rightarrow$ $\{v, \lambda v\}$ ist Basis

1. Fall: $\lambda = 1_K$ $\Rightarrow$ $B' = \{v\}$ ↯ denn: Mit B muss auch jede andere Basis von V zweielementig sein, da je zwei Basen gleichmächtig sind.

2. Fall: $\lambda \neq 1_K$ Als Basis ist $\{v, \lambda v\}$ linear unabhängig, somit auch das Tupel $(v, \lambda v)$. ↯ da $\lambda \cdot v + (-1_K) \cdot \lambda v = 0_V$, aber $(\lambda, -1_K) \neq (0_K, 0_K)$ Also muss μ ungleich 0_K sein.

„$\Leftarrow$" $B' = \{v, w'\}$ mit $w' = \lambda v + \mu w$, wobei $\lambda, \mu \in K$, $\mu \neq 0_K$

z.zg.: B' ist Basis, also (i) B' ist linear unabh.

(ii) $V = \mathrm{lin}(B')$

zu (i) Seien $\alpha, \beta \in K$ mit $\alpha v + \beta w' = 0_V$. z.zg.: $\alpha = \beta = 0_K$

einsetzen $\Rightarrow$ $\alpha v + \beta(\lambda v + \mu w) = 0_V$ $\Rightarrow$ $(\alpha + \beta\lambda) v + \beta \mu w = 0_V$

$B = \{v, w\}$ linear unabh. $\Rightarrow$ $\alpha + \beta\lambda = 0_K$ und $\beta\mu = 0_V$ $\overset{\mu \neq 0_K}{\Rightarrow}$

$\beta = 0_K$, $\alpha + \beta\lambda = 0_K$ $\Rightarrow$ $\alpha = \beta = 0_K$

zu (ii) „$\supseteq$" klar, da $\mathcal{B}' \subseteq V$ „$\subseteq$" Sei $u \in V$ vorgeg. $V = \operatorname{lin}(\mathcal{B})$

$\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in K$ mit $u = \alpha v + \beta w$ [Nebenrechnung: $\alpha' v + \beta' w' = u$

$\Leftrightarrow \alpha' v + \beta' w' = \alpha v + \beta w \Leftrightarrow \alpha' v + \beta'(\lambda v + \mu w) = \alpha v + \beta w \Leftrightarrow$

$(\alpha' + \beta' \lambda) v + \beta' \mu w = \alpha v + \beta w \Leftarrow \alpha' + \beta' \lambda = \alpha, \ \beta' \mu = \beta \Leftrightarrow$

$\beta' = \mu^{-1} \beta, \ \alpha' + \mu^{-1} \beta \lambda = \alpha \Leftrightarrow \alpha' = \alpha - \mu^{-1} \beta \lambda, \ \beta' = \mu^{-1} \beta$]

Sei $\alpha' = \alpha - \mu^{-1} \beta \lambda, \ \beta' = \mu^{-1} \beta$. Dann gilt $\alpha' v + \beta' w' =$

$(\alpha - \mu^{-1} \beta \lambda) v + \mu^{-1} \beta (\lambda v + \mu w) = \alpha v + \beta w = u \Rightarrow u \in \operatorname{lin}(\mathcal{B}')$ $\square$

Aufgabe 2

V, W K-Vektorräume, $\mathcal{B} \subseteq V$ Basis, $\phi: V \to W$ lineare Abb.

zu (a) Setze voraus, dass ϕ bijektiv ist. z.zg.: $\phi(\mathcal{B})$ ist Basis von W

zu überprüfen (i) $W = \operatorname{lin} \phi(\mathcal{B})$ (ii) $\phi(\mathcal{B})$ ist linear unabhängig

zu (i) „$\supseteq$" klar, da $\phi(\mathcal{B}) \subseteq W$ „$\subseteq$" Sei $w \in W$. z.zg.: $w \in \operatorname{lin} \phi(\mathcal{B})$

ϕ surjektiv $\Rightarrow \exists v \in V$ mit $\phi(v) = w$ $V = \operatorname{lin}(\mathcal{B}), v \in V \Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}$,

$v_1, \dots, v_r \in V, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \Rightarrow w = \phi(v) = \phi\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i\right)$

$\underset{\uparrow \phi \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \phi(v_i) \in \operatorname{lin} \phi(\mathcal{B})$, da $\phi(v_i) \in \phi(\mathcal{B})$ für $1 \leq i \leq r$

zu (ii) Sei $r \in \mathbb{N}$ und $w_1, \dots, w_r$ verschiedene Elemente aus $\phi(\mathcal{B})$.

z.zg.: $(w_1, \dots, w_r)$ ist linear unabhängig

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i \overset{(*)}{=} 0_W$ z.zg. $\lambda_i = 0_K$ für $1 \leq i \leq r$

Für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ gibt es wegen $w_i \in \phi(\mathcal{B})$ jeweils ein $v_i \in \mathcal{B}$

mit $\phi(v_i) = w_i$. Da die Elemente $w_1, \dots, w_r$ verschieden sind, gilt dasselbe für $v_1, \dots, v_r$. $(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \phi(v_i) = 0_W \overset{\phi \text{ linear}}{\Rightarrow}$

$\phi\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i\right) = 0_W = \phi(0_V) \underset{\phi \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0_V$

B linear unabh., $v_1, \dots, v_r$ verschiedene Elemente aus B

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0_K$ $\qquad \phi(v) = \phi(w) \Rightarrow v = w$

zu (b) Gegenbeispiel zu „ϕ injektiv $\Rightarrow \phi(B)$ Basis":

$V = \{0_V\}$, $W = \mathbb{R}$, $\phi: V \to W$, $0_V \mapsto 0$

zu überprüfen: (i) ϕ linear (ii) ϕ injektiv (iii) $B = \emptyset$ Basis von V

(iv) $\phi(\emptyset)$ ist keine Basis von W

zu (i) Seien $v, w \in V$, $\lambda \in V$. Dann gilt $v = w = 0_V$

und somit $\phi(v+w) = \phi(0_V + 0_V) = \phi(0_V) = 0 = 0 + 0 =$

$\phi(0_V) + \phi(0_V) = \phi(v) + \phi(w)$, $\phi(\lambda v) = \phi(\lambda \cdot 0_V) =$

$\phi(0_V) = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda \phi(0_V) = \lambda \phi(v)$

zu (ii) Seien $v, w \in V$ mit $\phi(v) = \phi(w)$. $\Rightarrow v = 0_V = w$

zu (iii) gilt lt. Vl., da $V = \{0_V\}$

zu (iv) Ang. $\phi(\emptyset) = \emptyset$ ist Basis von W. $\Rightarrow W = \mathrm{lin}(\emptyset) = \{0\}$

$\lightning$ zu $W = \mathbb{R}$

Gegenbeispiel zu „ϕ surjektiv $\Rightarrow \phi(B)$ Basis":

$V = \mathbb{R}$, $W = \{0_W\}$, $\phi: V \to W$, $a \mapsto 0_W$

zu überprüfen: (i) ϕ linear (ii) ϕ surjektiv (iii) $B = \{1\}$ Basis von V

(iv) $\phi(B)$ ist keine Basis von W

zu (i) Übung zu (ii) Sei $w \in W$ vorgeg. $\Rightarrow w = 0_W \Rightarrow \phi(0) = 0_W = w$

zu (iii) $1 \neq 0 = 0_V \Rightarrow B = \{1\}$ ist linear unabh. $\operatorname{lin}(B) \subseteq V$ klar,

da $1 \in V$ Sei umgekehrt $a \in V$. $\Rightarrow a = a \cdot 1 \in \operatorname{lin}(B)$

zu (iv) $\phi(B) = \phi(\{1\}) = \{\phi(1)\} = \{0_W\} \Rightarrow \phi(B)$ ist als Menge, die den Nullvektor enthält, nicht linear unabhängig, somit erst recht keine Basis

<u>zu (c)</u> gesucht: Vektorräume V und W, Basis B von V, bijektive Abb. $\phi: V \to W$, so dass $\phi(B)$ keine Basis von W

Setze $V = W = \mathbb{R}$, $B = \{1\}$, $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - 1$.

oben gezeigt: B Basis von V Die Abb. ϕ ist bijektiv, da $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$ Umkehrabbildung von ϕ (denn $\psi(\phi(x)) = x$, $\phi(\psi(x)) = x \; \forall x \in \mathbb{R}$).

aber: $\phi(B) = \phi(\{1\}) = \{\phi(1)\} = \{0\}$ ist keine Basis von V, da $\{0\}$ mit dem Nullvektor 0 von W nicht linear unabhängig ist. $\square$

Aufgabe 3

zu (a) Allgemein gilt: Ist $S = \{v_1, ..., v_d\}$ eine d-elementige Teilmenge von V (mit $d \in \mathbb{N}$), dann besteht $\text{lin}(S)$ aus p^d Elementen. Denn jedes Element $v \in \text{lin}(S)$ hat die Form $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_d v_d$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_d \in \mathbb{F}_p$, und für jeden Koeffizienten $\lambda_i \in \mathbb{F}_p$ gibt es p Möglichkeiten, insgesamt also p^d Möglichkeiten für das Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_d)$. Außerdem ist dieses Tupel durch v eindeutig bestimmt, denn ist $(\mu_1, ..., \mu_d)$ ein weiteres Tupel in $\mathbb{F}_p^d$ mit $\sum_{i=1}^d \lambda_i v_i = v = \sum_{i=1}^d \mu_i v_i$, dann folgt $\sum_{i=1}^d (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0_V$. Auf Grund der linearen Unabhängigkeit von S erhalten wir $\lambda_i - \mu_i = \bar{0}$, also $\lambda_i = \mu_i$ für $1 \leq i \leq d$.

Linear unabhängige Paare kann es nur geben, wenn V mindestens zweidimensional ist, also $n \geq 2$ gilt. Setzen wir dies voraus. Ein Paar (v, w) mit $v, w \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0_V$ und $w \in V \setminus \text{lin}(v)$ gilt. („$\Rightarrow$" Ist $v = 0_V$, dann gilt $\bar{1} \cdot v + \bar{0} \cdot w = 0_V$, aber $(\bar{1}, \bar{0}) \neq (\bar{0}, \bar{0})$. Ist $w \in \text{lin}(v)$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{F}_p$ mit $w = \lambda v$. Es gilt dann $\lambda v + (-\bar{1}) \cdot w = 0_V$, aber $(\lambda, -\bar{1}) \neq (\bar{0}, \bar{0})$. In beiden Fällen ist (v, w) also linear abhängig. „$\Leftarrow$" Ist (v, w) linear abhängig, dann gibt es ein Paar $(\lambda, \mu) \neq (\bar{0}, \bar{0})$ in $\mathbb{F}_p^2$ mit $\lambda v + \mu w = \bar{0}$. Ist $\mu \neq \bar{0}$, dann gilt $w = (-\frac{\lambda}{\mu}) v \in \text{lin}(v)$. Ist $\mu = \bar{0}$, $\lambda \neq \bar{0}$, dann folgt $\lambda v = 0_V$ und $v = 0_V$.) Um ein linear unabhängiges Paar (v, w) zu bilden, gibt es also $|V \setminus \{0_V\}| = |V| - 1 = p^n - 1$ Auswahlmöglichkeiten für v und nach Wahl von v noch $|V \setminus \text{lin}(v)| = |V| - |\text{lin}(v)| = p^n - p$. Insgesamt gibt es also $(p^n - 1)(p^n - p)$ linear unabhängige Paare in V, falls $n \geq 2$ ist.

Dreielementige linear unabhängige Tripel in V kann es nur geben, wenn $n \geq 3$ ist. Setzen wir dies voraus. Ein Tripel (u, v, w) mit $u, v, w \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn (u, v) linear unabhängig ist und $w \notin \text{lin}\{u, v\}$ gilt. („$\Rightarrow$" Ist (u, v) linear abhängig, dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_p$ mit $(\alpha, \beta) \neq (\bar{0}, \bar{0})$, aber $\alpha u + \beta v = 0_V$. Es gilt dann auch $(\alpha, \beta, \bar{0}) \neq (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})$, aber $\alpha u + \beta v + \bar{0} \cdot w = 0_V$. Ist $w \in \text{lin}\{u, v\}$, dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_p$ mit $w = \alpha u + \beta v$. Es gilt also $\alpha u + \beta w + (-\bar{1}) \cdot w = 0_V$, aber $(\alpha, \beta, -\bar{1}) \neq (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})$. In beiden Fällen ist (u, v, w) linear abhängig. „$\Leftarrow$" Ist (u, v, w) linear abhängig, dann gibt es ein Tripel $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})$ mit $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_V$. Ist $\gamma \neq \bar{0}$, dann gilt $w = \alpha \gamma^{-1} u + \beta \gamma^{-1} v \in \text{lin}(u, v)$. Ist $\gamma = \bar{0}$, dann folgt $(\alpha, \beta) \neq (\bar{0}, \bar{0})$ und $\alpha u + \beta v = 0_V$, das Paar (u, v) ist also linear abhängig.) In einem linear unabhängigen Tupel (u, v, w) gibt es also $(p^n - 1)(p^n - p)$ Möglichkeiten für das Paar (u, v). Ist dieses bereits gewählt, dann gibt es noch $|V \setminus \text{lin}\{u, v\}| = |V| - |\text{lin}\{u, v\}| = p^n - p^2$ Möglichkeiten für den Vektor w. Insgesamt gibt es also $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)$ linear unabhängige Tripel in V, falls $n \geq 3$ ist.

zu (b) Genau wie in Teil (a) beweist man für beliebiges $d \in \{2, ..., n-1\}$, dass ein Tupel $(v_1, ..., v_d, v_{d+1})$ genau dann linear unabhängig ist, wenn $(v_1, ..., v_d)$ linear unabhängig ist und $v_{d+1} \notin \text{lin}\{v_1, ..., v_d\}$ gilt. Durch vollständige Induktion über d kann man nun zeigen, dass die Anzahl der d-elementigen Tupel gleich

$$\prod_{i=0}^{d-1} (p^n - p^i)$$

ist. Für $d = 0$ ist dies das „leere" Produkt mit dem Wert 1, und das leere Tupel ist das einzige nullelementige linear unabhängige Tupel. In den Fällen $d = 1, 2$ haben wir die Formel bereits in Teil (a) verifiziert. Ist nun $d \in \{2, ..., n-1\}$ und setzen wir die Formel für d voraus, dann gibt es in einem $(d+1)$-elementigen linear unabhängigen Tupel $(v_1, ..., v_{d+1})$ auf Grund der Induktionsvoraussetzung genau $\prod_{i=0}^{d-1} (p^n - p^i)$ Möglichkeiten für das Tupel $(v_1, ..., v_d)$ und danach noch $|V \setminus \text{lin}\{v_1, ..., v_d\}| = |V| - |\text{lin}\{v_1, ..., v_d\}| = p^n - p^d$ Möglichkeiten für den Vektor v_{d+1}. Insgesamt kommen wir so auf $\prod_{i=0}^{d-1} (p^n - p^i) \cdot (p^n - p^d) = \prod_{i=0}^{d} (p^n - p^i)$ Möglichkeiten für das $(d+1)$-elementige Tupel.

Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen. Da die Anzahl d der Elemente in einem linear unabhängigen Tupel wegen $n = \dim(V)$ durch $0 \le d \le n$ beschränkt ist, ist die Gesamtzahl der linear unabhängigen Tupel durch $\sum_{d=0}^{n} \prod_{i=0}^{d-1} (p^n - p^i)$ gegeben.

zu (c) Auf Grund des Hinweises in der Aufgabenstellung und mit dem Ergebnis aus Teil (b) kommen wir für $0 \le d \le n$ jeweils auf $\frac{1}{d!} \prod_{i=0}^{d-1} (p^n - p^i)$ linear unabhängige d-elementige Teilmengen von V, und auf $\sum_{d=0}^{n} \frac{1}{d!} \prod_{i=0}^{d-1} (p^n - p^i)$ linear unabhängige Teilmengen insgesamt.

zu (d) Die geordneten Basen von V sind wegen $\dim(V)$ genau die n-elementigen linear unabhängigen Tupel. Nach Teil (b) ist deren Anzahl gleich $\prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i)$.

zu (e) Auf Grund des Hinweises und mit dem Ergebnis aus Teil (d) kommen wir auf

$$\frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i)$$

Basen des Vektorraums V. (Ist zum Beispiel $V = \mathbb{F}_2^2$, dann gibt es genau drei Basen, nämlich $\{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})\}$, $\{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$ und $\{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1})\}$, und es ist $\frac{1}{2!} \prod_{i=0}^{1} (p^2 - p^i) = \frac{1}{2}(4-1)(4-2) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$.)

Wiederholung

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(i) Linearkombinationen eines Tupels $(v_1, \dots, v_r)$ $(r \in \mathbb{N},\ v_1, \dots, v_r \in V)$

$=$ Vektoren der Form $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$

Menge der Linearkomb. des leeren Tupels $()$: $\{0_V\}$

(ii) Menge $\mathrm{lin}(S)$ der Linearkomb. einer Teilmenge $S \subseteq V$

$=$ Menge der Linearkomb. von Tupeln $(v_1, \dots, v_r)$ mit $r \in \mathbb{N}_0$

und $v_i \in S$ für $1 \leq i \leq r$ $\quad 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + (-1) \cdot (e_1 + e_2) = 0_V \Rightarrow$

(iii) Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ mit $r \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_r \in V$ linear unabhängig $\quad (e_1, e_2, e_1 + e_2)$ linear abhängig

$\Leftrightarrow$ Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ gilt jeweils die Implikation

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0_V \Rightarrow \lambda_i = 0_K \text{ für } 1 \leq i \leq r.$$

(Das leere Tupel $()$ ist immer linear unabhängig.)

(iv) Teilmenge $S \subseteq V$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Jedes Tupel bestehend aus verschiedenen Elementen von S ist linear unabhängig.

(v) $B \subseteq V$ Basis von V $\Leftrightarrow$ B linear unabhängig und $V = \mathrm{lin}(B)$

(vi) geordnete Basis $=$ Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ verschiedener Vektoren $v_i \in B$, so dass $\{v_1, \dots, v_r\}$ Basis von V

Globalübungsblatt 7

Aufgabe 1 V K-Vektorraum

zu (a) z.zg.: V hat nur einelementige Basen $\Leftrightarrow$ $\exists v \in V \setminus \{0_V\}$ mit $V = \text{lin}\{v\}$

„$\Rightarrow$" Nach Voraussetzung hat V eine einelementige Basis $\{v\}$, wobei $v \in V$.
Dann gilt $V = \text{lin}\{v\}$. Wäre $v = 0_V$, dann wäre $\{v\}$ linear abhängig,
denn lt. Vl. ist jede Menge (oder jedes Tupel), das den Nullvektor
0_V enthält, linear abhängig. $\lightning$ zu $\{v\}$ Basis also: $\exists v \in V \setminus \{0_V\}$
mit $V = \text{lin}\{v\}$

Frage: Wenn $V = \{0_V\}$, ist dann $\{0_V\}$ linear abhängig?
Ja, denn das Tupel (0_V) ist linear abhängig, da $1_K \cdot 0_V = 0_V$
aber $1_K \neq 0_K$. (Beachte: $\{0_V\}$ ist hier keine Basis von V.
Statt dessen ist $\emptyset$ eine Basis von $V = \{0_V\}$.)

„$\Leftarrow$" Vor.: $V = \text{lin}\{v\}$ für ein $v \in V \setminus \{0_V\}$
Dann ist $\{v\}$ eine einelem. Basis, denn wegen $v \neq 0_V$ ist $\{v\}$
linear unabhängig, und außerdem gilt $V = \text{lin}\{v\}$.
Basen mit null oder mehr als einem Element kann es nicht
geben, denn $V = \text{lin}\{v\}$ ist endl. erzeugt, und je zwei Basen
eines solchen K-Vektorraums sind gleich mächtig.

zu (b) Vor.: $\{v, w\}$ zweielementige Basis von V $(v \neq w)$

$w' \in V$ beliebig

z.zg.: $B' = \{v, w'\}$ ist Basis von V $\iff$ $\exists\, \lambda, \mu \in K$ mit $\mu \neq 0_K$

und $w' = \lambda v + \mu w$

„$\Rightarrow$" Vor.: $B' = \{v, w'\}$ ist Basis $\quad$ B Basis von V $\Rightarrow$ $V = \operatorname{lin}(B)$

$w' \in V$ $\Rightarrow$ w' ist Linearkomb. von B $\Rightarrow$ $\exists\, \lambda, \mu \in K$ mit

$w' = \lambda v + \mu w$ $\quad$ Ang. $\mu = 0_K$. $\Rightarrow$ $w' = \lambda v$ $\Rightarrow$ $\{v, \lambda v\}$ ist Basis

1. Fall: $\lambda = 1_K$ $\Rightarrow$ $B' = \{v\}$ ↯ denn: Mit B muss auch jede andere Basis von V zweielementig sein, da je zwei Basen gleichmächtig sind.

2. Fall: $\lambda \neq 1_K$ $\quad$ Als Basis ist $\{v, \lambda v\}$ linear unabhängig, somit auch das Tupel $(v, \lambda v)$. ↯ da $\lambda \cdot v + (-1_K) \cdot \lambda v = 0_V$, aber $(\lambda, -1_K) \neq (0_K, 0_K)$ $\quad$ Also muss μ ungleich 0_K sein.

„$\Leftarrow$" $B' = \{v, w'\}$ mit $w' = \lambda v + \mu w$, wobei $\lambda, \mu \in K$, $\mu \neq 0_K$

z.zg.: B' ist Basis, also (i) B' ist linear unabh.

(ii) $V = \operatorname{lin}(B')$

zu (i) Seien $\alpha, \beta \in K$ mit $\alpha v + \beta w' = 0_V$. z.zg.: $\alpha = \beta = 0_K$

einsetzen $\Rightarrow$ $\alpha v + \beta(\lambda v + \mu w) = 0_V$ $\Rightarrow$ $(\alpha + \beta\lambda) v + \beta \mu w = 0_V$

$B = \{v, w\}$ linear unabh. $\Rightarrow$ $\alpha + \beta\lambda = 0_K$ und $\beta\mu = 0_V$ $\overset{\mu \neq 0_K}{\Rightarrow}$

$\beta = 0_K$, $\alpha + \beta\lambda = 0_K$ $\Rightarrow$ $\alpha = \beta = 0_K$

zu (ii) „$\supseteq$" klar, da $B' \subseteq V$ „$\subseteq$" Sei $u \in V$ vorgeg. $V = \operatorname{lin}(B)$

$\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in K$ mit $u = \alpha v + \beta w$ [Nebenrechnung: $\alpha' v + \beta' w' = u$

$\Leftrightarrow \alpha' v + \beta' w' = \alpha v + \beta w \Leftrightarrow \alpha' v + \beta'(\lambda v + \mu w) = \alpha v + \beta w \Leftrightarrow$

$(\alpha' + \beta' \lambda) v + \beta' \mu w = \alpha v + \beta w \Leftarrow \alpha' + \beta' \lambda = \alpha, \; \beta' \mu = \beta \Leftrightarrow$

$\beta' = \mu^{-1} \beta, \; \alpha' + \mu^{-1} \beta \lambda = \alpha \Leftrightarrow \alpha' = \alpha - \mu^{-1} \beta \lambda, \; \beta' = \mu^{-1} \beta$]

Sei $\alpha' = \alpha - \mu^{-1} \beta \lambda$, $\beta' = \mu^{-1} \beta$. Dann gilt $\alpha' v + \beta' w' =$

$(\alpha - \mu^{-1} \beta \lambda) v + \mu^{-1} \beta (\lambda v + \mu w) = \alpha v + \beta w = u \Rightarrow u \in \operatorname{lin}(B')$ $\square$

Aufgabe 2

V, W K-Vektorräume, $B \subseteq V$ Basis, $\phi: V \to W$ lineare Abb.

zu (a) Setze voraus, dass ϕ bijektiv ist. z.zg.: $\phi(B)$ ist Basis von W

zu überprüfen (i) $W = \operatorname{lin} \phi(B)$ (ii) $\phi(B)$ ist linear unabhängig

zu (i) „$\supseteq$" klar, da $\phi(B) \subseteq W$ „$\subseteq$" Sei $w \in W$. z.zg.: $w \in \operatorname{lin} \phi(B)$

ϕ surjektiv $\Rightarrow \exists v \in V$ mit $\phi(v) = w$ $V = \operatorname{lin}(B), v \in V \Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}$,

$v_1, \dots, v_r \in V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \Rightarrow w = \phi(v) = \phi\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i\right)$

$\underset{\uparrow \phi \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \phi(v_i) \in \operatorname{lin} \phi(B)$, da $\phi(v_i) \in \phi(B)$ für $1 \leq i \leq r$

zu (ii) Sei $r \in \mathbb{N}$ und $w_1, \dots, w_r$ verschiedene Elemente aus $\phi(B)$.

z.zg.: $(w_1, \dots, w_r)$ ist linear unabhängig

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i \overset{(*)}{=} 0_W$ z.zg. $\lambda_i = 0_K$ für $1 \leq i \leq r$

Für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ gibt es wegen $w_i \in \phi(B)$ jeweils ein $v_i \in B$

mit $\phi(v_i) = w_i$. Da die Elemente $w_1, \dots, w_r$ verschieden sind, gilt dasselbe für $v_1, \dots, v_r$. $(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \phi(v_i) = 0_W \overset{\phi \text{ linear}}{\Rightarrow}$
$\phi\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i\right) = 0_W = \phi(0_V) \underset{\phi \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0_V$

B linear unabh., $v_1, \dots, v_r$ verschiedene Elemente aus B
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0_K$ $\qquad \phi(v) = \phi(w) \Rightarrow v = w$

zu (b) Gegenbeispiel zu „ϕ injektiv $\Rightarrow \phi(B)$ Basis":
$V = \{0_V\}$, $W = \mathbb{R}$, $\phi: V \to W$, $0_V \mapsto 0$
zu überprüfen: (i) ϕ linear (ii) ϕ injektiv (iii) $B = \emptyset$ Basis von V
(iv) $\phi(\emptyset)$ ist keine Basis von W
zu (i) Seien $v, w \in V$, $\lambda \in V$. Dann gilt $v = w = 0_V$
und somit $\phi(v + w) = \phi(0_V + 0_V) = \phi(0_V) = 0 = 0 + 0 =$
$\phi(0_V) + \phi(0_V) = \phi(v) + \phi(w)$, $\phi(\lambda v) = \phi(\lambda \cdot 0_V) =$
$\phi(0_V) = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda \phi(0_V) = \lambda \phi(v)$
zu (ii) Seien $v, w \in V$ mit $\phi(v) = \phi(w)$. $\Rightarrow v = 0_V = w$
zu (iii) gilt lt. VL., da $V = \{0_V\}$
zu (iv) Ang. $\phi(\emptyset) = \emptyset$ ist Basis von W. $\Rightarrow W = \text{lin}(\emptyset) = \{0\}$
$\lightning$ zu $W = \mathbb{R}$

Gegenbeispiel zu „ϕ surjektiv $\Rightarrow \phi(B)$ Basis":
$V = \mathbb{R}$, $W = \{0_W\}$, $\phi: V \to W$, $a \mapsto 0_W$

zu überprüfen: (i) ϕ linear (ii) ϕ surjektiv (iii) $B = \{1\}$ Basis von V

(iv) $\phi(B)$ ist keine Basis von W

zu (i) Übung   zu (ii) Sei $w \in W$ vorgeg. $\Rightarrow w = 0_W \Rightarrow \phi(0) = 0_W = w$

zu (iii) $1 \neq 0 = 0_V \Rightarrow B = \{1\}$ ist linear unabh. $\text{lin}(B) \subseteq V$ klar,

da $1 \in V$. Sei umgekehrt $a \in V$. $\Rightarrow a = a \cdot 1 \in \text{lin}(B)$

zu (iv) $\phi(B) = \phi(\{1\}) = \{\phi(1)\} = \{0_W\} \Rightarrow \phi(B)$ ist als

Menge, die den Nullvektor enthält, nicht linear unabhängig, somit

erst recht keine Basis

<u>zu (c)</u> gesucht: Vektorräume V und W, Basis B von V,

bijektive Abb. $\phi: V \to W$, so dass $\phi(B)$ keine Basis von W

Setze $V = W = \mathbb{R}$, $B = \{1\}$, $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - 1$.

oben gezeigt: B Basis von V. Die Abb. ϕ ist bijektiv,

da $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$ Umkehrabbildung von ϕ

(dann $\psi(\phi(x)) = x$, $\phi(\psi(x)) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$).

aber: $\phi(B) = \phi(\{1\}) = \{\phi(1)\} = \{0\}$ ist keine

Basis von V, da $\{0\}$ mit dem Nullvektor 0 von W nicht

linear unabhängig ist. $\square$

Aufgabe 3

zu (a) Allgemein gilt: Ist $S = \{v_1, ..., v_d\}$ eine d-elementige Teilmenge von V (mit $d \in \mathbb{N}$), dann besteht $\mathrm{lin}(S)$ aus p^d Elementen. Denn jedes Element $v \in \mathrm{lin}(S)$ hat die Form $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_d v_d$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_d \in \mathbb{F}_p$, und für jeden Koeffizienten $\lambda_i \in \mathbb{F}_p$ gibt es p Möglichkeiten, insgesamt also p^d Möglichkeiten für das Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_d)$. Außerdem ist dieses Tupel durch v eindeutig bestimmt, denn ist $(\mu_1, ..., \mu_d)$ ein weiteres Tupel in $\mathbb{F}_p^d$ mit $\sum_{i=1}^d \lambda_i v_i = v = \sum_{i=1}^d \mu_i v_i$, dann folgt $\sum_{i=1}^d (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0_V$. Auf Grund der linearen Unabhängigkeit von S erhalten wir $\lambda_i - \mu_i = \bar{0}$, also $\lambda_i = \mu_i$ für $1 \le i \le d$.

Linear unabhängige Paare kann es nur geben, wenn V mindestens zweidimensional ist, also $n \ge 2$ gilt. Setzen wir dies voraus. Ein Paar (v, w) mit $v, w \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0_V$ und $w \in V \setminus \mathrm{lin}(v)$ gilt. („$\Rightarrow$“ Ist $v = 0_V$, dann gilt $\bar{1} \cdot v + \bar{0} \cdot w = 0_V$, aber $(\bar{1}, \bar{0}) \neq (\bar{0}, \bar{0})$. Ist $w \in \mathrm{lin}(v)$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{F}_p$ mit $w = \lambda v$. Es gilt dann $\lambda v + (-\bar{1}) \cdot w = 0_V$, aber $(\lambda, -\bar{1}) \neq (\bar{0}, \bar{0})$. In beiden Fällen ist (v, w) also linear abhängig. „$\Leftarrow$“ Ist (v, w) linear abhängig, dann gibt es ein Paar $(\lambda, \mu) \neq (\bar{0}, \bar{0})$ in $\mathbb{F}_p^2$ mit $\lambda v + \mu w = \bar{0}$. Ist $\mu \neq \bar{0}$, dann gilt $w = (-\frac{\lambda}{\mu}) v \in \mathrm{lin}(v)$. Ist $\mu = \bar{0}$, $\lambda \neq \bar{0}$, dann folgt $\lambda v = 0_V$ und $v = 0_V$.) Um ein linear unabhängiges Paar (v, w) zu bilden, gibt es also $|V \setminus \{0_V\}| = |V| - 1 = p^n - 1$ Auswahlmöglichkeiten für v und nach Wahl von v noch $|V \setminus \mathrm{lin}(v)| = |V| - |\mathrm{lin}(v)| = p^n - p$. Insgesamt gibt es also $(p^n - 1)(p^n - p)$ linear unabhängige Paare in V, falls $n \ge 2$ ist.

Dreielementige linear unabhängige Tripel in V kann es nur geben, wenn $n \ge 3$ ist. Setzen wir dies voraus. Ein Tripel (u, v, w) mit $u, v, w \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn (u, v) linear unabhängig ist und $w \notin \mathrm{lin}\{u, v\}$ gilt. („$\Rightarrow$“ Ist (u, v) linear abhängig, dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_p$ mit $(\alpha, \beta) \neq (\bar{0}, \bar{0})$, aber $\alpha u + \beta v = 0_V$. Es gilt dann auch $(\alpha, \beta, \bar{0}) \neq (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})$, aber $\alpha u + \beta v + \bar{0} \cdot w = 0_V$. Ist $w \in \mathrm{lin}\{u, v\}$, dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_p$ mit $w = \alpha u + \beta v$. Es gilt also $\alpha u + \beta w + (-\bar{1}) \cdot w = 0_V$, aber $(\alpha, \beta, -\bar{1}) \neq (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})$. In beiden Fällen ist (u, v, w) linear abhängig. „$\Leftarrow$“ Ist (u, v, w) linear abhängig, dann gibt es ein Tripel $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})$ mit $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_V$. Ist $\gamma \neq \bar{0}$, dann gilt $w = \alpha \gamma^{-1} u + \beta \gamma^{-1} v \in \mathrm{lin}(u, v)$. Ist $\gamma = \bar{0}$, dann folgt $(\alpha, \beta) \neq (\bar{0}, \bar{0})$ und $\alpha u + \beta v = 0_V$, das Paar (u, v) ist also linear abhängig.) In einem linear unabhängigen Tupel (u, v, w) gibt es also $(p^n - 1)(p^n - p)$ Möglichkeiten für das Paar (u, v). Ist dieses bereits gewählt, dann gibt es noch $|V \setminus \mathrm{lin}\{u, v\}| = |V| - |\mathrm{lin}\{u, v\}| = p^n - p^2$ Möglichkeiten für den Vektor w. Insgesamt gibt es also $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)$ linear unabhängige Tripel in V, falls $n \ge 3$ ist.

zu (b) Genau wie in Teil (a) beweist man für beliebiges $d \in \{2, ..., n-1\}$, dass ein Tupel $(v_1, ..., v_d, v_{d+1})$ genau dann linear unabhängig ist, wenn $(v_1, ..., v_d)$ linear unabhängig ist und $v_{d+1} \notin \mathrm{lin}\{v_1, ..., v_d\}$ gilt. Durch vollständige Induktion über d kann man nun zeigen, dass die Anzahl der d-elementigen Tupel gleich

$$\prod_{i=0}^{d-1} (p^n - p^i)$$

ist. Für $d = 0$ ist dies das „leere“ Produkt mit dem Wert 1, und das leere Tupel ist das einzige nullelementige linear unabhängige Tupel. In den Fällen $d = 1, 2$ haben wir die Formel bereits in Teil (a) verifiziert. Ist nun $d \in \{2, ..., n-1\}$ und setzen wir die Formel für d voraus, dann gibt es in einem $(d+1)$-elementigen linear unabhängigen Tupel $(v_1, ..., v_{d+1})$ auf Grund der Induktionsvoraussetzung genau $\prod_{i=0}^{d-1} (p^n - p^i)$ Möglichkeiten für das Tupel $(v_1, ..., v_d)$ und danach noch $|V \setminus \mathrm{lin}\{v_1, ..., v_d\}| = |V| - |\mathrm{lin}\{v_1, ..., v_d\}| = p^n - p^d$ Möglichkeiten für den Vektor v_{d+1}. Insgesamt kommen wir so auf $\prod_{i=0}^{d-1} (p^n - p^i) \cdot (p^n - p^d) = \prod_{i=0}^{d} (p^n - p^i)$ Möglichkeiten für das $(d+1)$-elementige Tupel.

Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen. Da die Anzahl d der Elemente in einem linear unabhängigen Tupel wegen $n = \dim(V)$ durch $0 \le d \le n$ beschränkt ist, ist die Gesamtzahl der linear unabhängigen Tupel durch $\sum_{d=0}^{n} \prod_{i=0}^{d-1} (p^n - p^i)$ gegeben.

zu (c) Auf Grund des Hinweises in der Aufgabenstellung und mit dem Ergebnis aus Teil (b) kommen wir für $0 \le d \le n$ jeweils auf $\frac{1}{d!} \prod_{i=0}^{d-1} (p^n - p^i)$ linear unabhängige d-elementige Teilmengen von V, und auf $\sum_{d=0}^{n} \frac{1}{d!} \prod_{i=0}^{d-1} (p^n - p^i)$ linear unabhängige Teilmengen insgesamt.

zu (d) Die geordneten Basen von V sind wegen $\dim(V)$ genau die n-elementigen linear unabhängigen Tupel. Nach Teil (b) ist deren Anzahl gleich $\prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i)$.

zu (e) Auf Grund des Hinweises und mit dem Ergebnis aus Teil (d) kommen wir auf

$$\frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i)$$

Basen des Vektorraums V. (Ist zum Beispiel $V = \mathbb{F}_2^2$, dann gibt es genau drei Basen, nämlich $\{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})\}$, $\{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$ und $\{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1})\}$, und es ist $\frac{1}{2!} \prod_{i=0}^{1} (p^2 - p^i) = \frac{1}{2}(4-1)(4-2) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$.)