Lineare Algebra

— Lösung Blatt 6 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Es gilt $v_5 = v_2 - v_3$ und $v_6 = v_2 + v_3$.

zu (b) Laut Vorlesung gilt: Ist V ein K-Vektorraum, $S \subseteq V$ eine Teilmenge und U ein Untervektorraum von V mit $S \subseteq U$, dann folgt $\text{lin}(S) \subseteq U$. Weil $\text{lin}\,\{v_2, v_5, v_6\}$ und $\text{lin}\,\{v_3, v_5, v_6\}$ Utnervektorräume von $\mathbb{R}^4$ sind, genügt es also zu überprüfen, dass $\{v_2, v_5, v_6\} \subseteq \text{lin}\,\{v_3, v_5, v_6\}$ und $\{v_3, v_5, v_6\} \subseteq \text{lin}\,\{v_2, v_5, v_6\}$ gilt.

Wegen $v_5, v_6 \in \{v_3, v_5, v_6\}$ gilt erst recht $v_5, v_6 \in \text{lin}\,\{v_3, v_5, v_6\}$. Außerdem ist $v_2 = v_3 + v_5 \in \text{lin}\,\{v_3, v_5, v_6\}$. Ingesamt gilt also $\{v_2, v_5, v_6\} \subseteq \text{lin}\,\{v_3, v_5, v_6\}$. Für die zweite Inklusion bemerken wir, dass aus $v_5, v_6 \in \{v_2, v_5, v_6\}$ jedenfalls $v_5, v_6 \in \text{lin}\,\{v_2, v_5, v_6\}$ folgt. Wegen $v_3 = v_2 - v_5 \in \text{lin}\,\{v_2, v_5, v_6\}$ gilt insgesamt $\{v_3, v_5, v_6\} \subseteq \text{lin}\,\{v_2, v_5, v_6\}$.

zu (c) Zunächst überprüfen wir, dass $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig ist. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$ vorgegeben. Dann gilt

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ und $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Subtraktion der ersten Gleichung von der dritten liefert $\lambda_3 = 0$. Durch Einsetzen erhalten wir die Gleichungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{und} \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten liefert $\lambda_1 = 0$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, dann folgt $\lambda_2 = 0$. Insgesamt gilt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, damit ist die lineare Unabhängigkeit nachgewiesen.

Nun müssen wir noch zeigen, dass B ein Erzeugendensystem von $\text{lin}(S)$ ist, also $\text{lin}(B) = \text{lin}(S)$ gilt. Die Inklusion „$\subseteq$“ ist wegen $B \subseteq S$ offensichtlich. Zum Beweis von „$\supseteq$“ müssen wir $S \subseteq \text{lin}(B)$ überprüfen. Wegen $v_1, v_2, v_3 \in B$ gilt jedenfalls $v_1, v_2, v_3 \in \text{lin}(B)$. Aus $v_2 + v_4 = v_1$ folgt $v_4 = v_1 - v_2 \in \text{lin}(B)$. Aus $v_5 = v_2 - v_3$ folgt $v_5 \in \text{lin}(B)$, und die Gleichung $v_6 = v_2 + v_3$ liefert $v_6 \in \text{lin}(B)$. Damit ist insgesamt $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \subseteq \text{lin}(B)$ nachgewiesen.

Aufgabe 2

zu (a) Sei $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{e_1\}$ und $T = \{2e_1\}$ (wobei $e_1 = (1,0)$ den ersten Einheitsvektor in V bezeichnet). Wegen $2e_1 \in \text{lin}(S)$ gilt $\text{lin}(T) \subseteq \text{lin}(S)$, und wegen $e_1 = \frac{1}{2}\cdot(2e_1) \in \text{lin}(T)$ gilt $\text{lin}(S) \subseteq \text{lin}(T)$, insgesamt also $\text{lin}(S) = \text{lin}(T)$. Es folgt $\text{lin}(S) \cap \text{lin}(T) = \text{lin}(S) \cap \text{lin}(S) = \text{lin}(S) = \{\lambda e_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Wegen $S \cap T = \varnothing$ ist andererseits $\text{lin}(S \cap T) = \text{lin}(\varnothing) = \{0_V\}$.

zu (b) „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Nach Definition der direkten Summe müssen wir überprüfen

$$(1)\ \text{lin}(S \cup T) = \text{lin}(S) + \text{lin}(T) \qquad (2)\ \text{lin}(S) \cap \text{lin}(T) = \{0_V\}$$

zu (1) „$\supseteq$“ Wegen $S \subseteq S \cup T$ gilt $\text{lin}(S) \subseteq \text{lin}(S \cup T)$, und aus $T \subseteq S \cup T$ folgt ebenso $\text{lin}(T) \subseteq \text{lin}(S \cup T)$. Sei nun $v \in \text{lin}(S) + \text{lin}(T)$ vorgegeben. Nach Definition der Summe zweier Untervektorräume gibt es Vektoren $v' \in \text{lin}(S)$ und $v'' \in \text{lin}(T)$ mit $v = v' + v''$. Es folgt $v' \in \text{lin}(S \cup T)$ und $v'' \in \text{lin}(S \cup T)$. Weil $\text{lin}(S \cup T)$ ein Untervektorraum von V ist, erhalten wir $v' + v'' \in \text{lin}(S \cup T)$, also $v \in \text{lin}(S \cup T)$.

„$\subseteq$“ Sei $w \in \text{lin}(S \cup T)$ vorgegeben. Dann gibt es ein Tupel $(v_1, ..., v_r)$ von Vektoren aus $S \cup T$, so dass w eine Linearkombination dieses Tupels ist. Es existieren also $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ mit $w = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i$. Für $1 \le i \le r$ gilt jeweils $v_i \in S$ oder $v_i \in T$. Nach Umsortierung der Vektoren können wir annehmen, dass ein $k \in \{0, ..., r\}$ existiert mit $v_i \in S$ für $1 \le i \le k$ und $v_i \in T$ für $k < i \le r$. Es gilt dann $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \in \text{lin}(S)$ und $\sum_{i=k+1}^r \lambda_i v_i \in \text{lin}(T)$, insgesamt also

$$w \quad = \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i + \sum_{i=k+1}^r \lambda_i v_i \in \text{lin}(S) + \text{lin}(T).$$

zu (2) „$\supseteq$“ Weil $\text{lin}(S)$ ein Untervektorraum von V ist, gilt $0_V \in \text{lin}(S)$, und aus demselben Grund gilt $0_V \in \text{lin}(T)$. Es folgt $\{0_V\} \subseteq \text{lin}(S) \cap \text{lin}(T)$.

„$\subseteq$“ Sei $w \in \text{lin}(S) \cap \text{lin}(T)$ vorgegeben. Wegen $w \in \text{lin}(S)$ ist w Linearkombination eines Tupels $(v_1, ..., v_r)$ mit $v_i \in S$ für $1 \le i \le r$, und wegen $w \in \text{lin}(T)$ ist w zugleich Linearkombination eines Tupels $(w_1, ..., w_s)$ mit $w_j \in T$ für $1 \le j \le s$. Es gibt also $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ und $\mu_1, ..., \mu_s \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \quad = \quad w \quad = \quad \sum_{j=1}^s \mu_j w_j$$

was umgeformt werden kann zu

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^s (-\mu_j) w_j \quad = \quad 0_V. \qquad (*)$$

Dabei dürfen wir annehmen, dass beide Tupel aus lauter verschiedenen Vektoren bestehen. Wegen $S \cap T = \varnothing$ besteht dann das Tupel $(v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s)$ aus lauter verschiedenen Elementen der Menge $S \cup T$. Nehmen wir nun an, dass $w \neq 0_V$ ist. Dann muss $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, ..., r\}$ gelten. Aber dann folgt aus (*), dass das Tupel $(v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s)$ linear abhängig ist, was im Widerspruch zur Vorausetzung steht, dass $S \cup T$ linear unabhängig ist. Damit ist gezeigt, dass aus $w \in \text{lin}(S) \cap \text{lin}(T)$ jeweils $w = 0_V$ folgt.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Nach Voraussetzung gilt $\operatorname{lin}(S \cup T) = \operatorname{lin}(S) \oplus \operatorname{lin}(T)$, also $\operatorname{lin}(S \cup T) = \operatorname{lin}(S) + \operatorname{lin}(T)$ und $\operatorname{lin}(S) \cap \operatorname{lin}(T) = \{0_V\}$. Nehmen wir nun an, $S \cap T$ wäre nichtleer, und $w \in S \cap T$. Wegen $S \subseteq \operatorname{lin}(S)$ und $T \subseteq \operatorname{lin}(T)$ läge w dann auch in $\operatorname{lin}(S) \cap \operatorname{lin}(T) = \{0_V\}$, und daraus würde $w = 0_V$ folgen. Aber auf Grund der linearen Unabhängigkeit von S kann 0_V kein Element von S sein. Also war die Annahme falsch, und es muss $S \cap T = \varnothing$ gelten.

Nehmen wir nun an, $S \cup T$ wäre linear abhängig. Dann gäbe es ein Tupel $(v_1, ..., v_r)$ bestehend aus lauter verschiedenen Vektoren $v_i \in S \cup T$, das linear abhängig ist. Nach Umsortierung der Vektoren können wir annehmen, dass ein $k \in \{0, ..., r\}$ existiert mit $v_i \in S$ für $1 \leq i \leq k$ und $v_i \in T$ für $k < i \leq r$. Auf Grund der lineare Abhängigkeit des Tupels gibt es ein Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ mit

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \quad = \quad 0_V$$

und $\lambda_j \neq 0$ für mindestens ein $j \in \{1, ..., r\}$. Diese Gleichung kann umgestellt werden zu

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad = \quad \sum_{i=k+1}^{r} (-\lambda_i) v_i$$

wobei der Vektor auf der linken Seite der Gleichung in $\operatorname{lin}(S)$ und der Vektor auf der rechten Seite in $\operatorname{lin}(T)$ liegt. Betrachten wir zunächst den Fall, dass $\lambda_j \neq 0$ für ein j mit $j \leq k$ gilt. Wäre $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0_V$, dann würde daraus die lineare Abhängigkeit von $(v_1, ..., v_k)$ folgen, was zur linearen Unabhängigkeit der Menge S im Widerspruch steht. Im Fall $j > k$ würde $\sum_{i=k+1}^{r} (-\lambda_i) v_i = 0_V$ entsprechend im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Menge T stehen. Also ist $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ ein Vektor ungleich 0_V in $\operatorname{lin}(S) \cap \operatorname{lin}(T)$. Aber dies steht im Widerspruch zu $\operatorname{lin}(S) \cap \operatorname{lin}(T) = \{0_V\}$. Also ist $S \cup T$ linear unabhängig.

Aufgabe 3

zu (a) „$\Rightarrow$" Nach Voraussetzung ist ϕ injektiv. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $S = \{v_1, ..., v_n\}$ eine n-elementige, linear unabhängige Menge. Wäre $\phi(S) = \{\phi(v_1), ..., \phi(v_n)\}$ nicht n-elementig, dann müsste es $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $\phi(v_i) = \phi(v_j)$ und $i \neq j$ geben. Aber dies steht wegen $v_i \neq v_j$ im Widerspruch zur Injektivität von ϕ. Nun weisen wir noch die lineare Unabhängigkeit von $\phi(S)$ nach. Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(v_i) = 0_W$. Weil ϕ linear ist, folgt

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) \quad = \quad 0_W \quad = \quad \phi(0_V).$$

Auf Grund der Injektivität von ϕ folgt $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_V$. Weil S linear unabhängig ist, folgt daraus wiederum $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit von $\phi(S)$ nachgewiesen.

„$\Leftarrow$" Nach Voraussetzung ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede linear unabhängige, n-elementige Teilmenge S von V auch $\phi(S)$ eine n-elementige, linear unabhängige Menge. Nehmen wir nun an, ϕ wäre nicht injektiv. Dann gäbe es $v, w \in V$ mit $v \neq w$ und $\phi(v) = \phi(w)$. Die Menge $S = \{v, w\}$ ist zweielementig. Betrachten wir zunächst den Fall, dass $S = \{v, w\}$ linear unabhängig ist. Dann muss $\phi(S)$ auf Grund der Voraussetzung (für $n = 2$) zweielementig sein, was aber wegen $\phi(v) = \phi(w)$ nicht der Fall ist.

Setzen wir nun voraus, dass $S = \{v, w\}$ linear abhängig ist. Dann gilt $v = 0_V$, oder es ist $v \neq 0_V$ und $w = \lambda v$ für ein $\lambda \in K$. Im ersten Fall gilt $w \neq 0_V$ wegen $w \neq v$, aber $\phi(w) = \phi(v) = \phi(0_V) = 0_W$. Die Menge $\{w\}$ ist einelementig und linear unabhängig, aber $\{\phi(w)\}$ linear abhängig. Das widerspricht der Voraussetzung für $n = 1$. Betrachten wir nun den Fall $v \neq 0_V$ und $w = \lambda v$ für ein $\lambda \in K$. Wegen $v \neq w$ muss $v \neq \lambda v$ und damit $\lambda \neq 1$ gelten. Aus $\phi(v) = \phi(w) = \phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$ folgt aber $(\lambda - 1)\phi(v) = 0_W$ und wegen $\lambda - 1 \neq 0$ somit $\phi(v) = 0_V$. Die Menge $\{v\}$ ist einelementig und linear unabhängig, aber $\{\phi(v)\}$ ist linear abhängig. Erneut ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung für $n = 1$.

zu (b) „$\Rightarrow$" Nach Voraussetzung ist ϕ surjektiv. Sei S ein Erzeugendensystem von V. Zu zeigen ist $\operatorname{lin} \phi(S) = W$. Sei dazu $w \in W$ vorgegeben. Da ϕ surjektiv ist, gibt es ein $u \in V$ mit $\phi(u) = w$. Da S ein Erzeugendensystem von V ist, gibt es ein Tupel $(v_1, ..., v_r)$ bestehend aus Vektoren $v_i \in S$ und Koeffizienten $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ mit $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$. Es folgt

$$w \quad = \quad \phi(u) \quad = \quad \phi\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \phi(v_i).$$

Für $1 \leq i \leq r$ gilt $\phi(v_i) \in \phi(S)$. Also ist w Linearkombination eines Tupels von Vektoren aus $\phi(S)$. Damit ist $w \in \operatorname{lin} \phi(S)$ nachgewiesen. Dies zeigt, dass $\phi(S)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

„$\Leftarrow$" Offenbar ist V ein Erzeugendensystem von V (denn jeder Vektor $v \in V$ kann durch die Gleichung $v = 1 \cdot v$ als Linearkombination von V dargestellt werden). Auf Grund der Voraussetzung ist somit $\phi(V)$ ein Erzeugendensystem von W. Zum Nachweis der Surjektivität von ϕ sei nun $w \in W$ vorgegeben. Weil $\phi(V)$ ein Erzeugendensystem von W ist, gilt $w \in \operatorname{lin} \phi(V)$. Es gibt also eine Familie $(w_1, ..., w_r)$ von Vektoren $w_i \in \phi(V)$ und Koeffizienten $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ mit $w = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i$. Wegen $w_i \in \phi(V)$ existiert jeweils ein $v_i \in V$ mit $\phi(v_i) = w_i$, für $1 \leq i \leq r$. Setzen wir nun $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$, dann folgt

$$\phi(u) \quad = \quad \phi\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \phi(v_i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i \quad = \quad w.$$

Damit ist die Surjektivität von ϕ nachgewiesen.