Lineare Algebra

— Lösung Blatt 5 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Jeder Vektorraum über einem Körper K besitzt zugleich die Struktur einer Gruppe. Genauer gilt: Ist $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum, dann ist $(V, +)$ eine abelsche Gruppe.

zu (b) Laut Vorlesung kann jeder Körper K auch als K-Vektorraum aufgefasst werden, wobei die Vektoraddition die Addition auf dem Körper und die skalare Multiplikation die Multiplikation auf dem Körper ist. Wir wissen, dass es einen Körper $\mathbb{F}_2$ bestehend aus zwei Elementen gibt. Also ist $\mathbb{F}_2$ zugleich ein Vektorraum mit genau zwei Elementen.

Aus der Vorlesung ist auch bekannt, dass jede einelementige Menge $\{0_V\}$ eine Struktur als K-Vektorraum besitzt, für einen beliebigen Körper K. Also ist jede solche Menge auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, mit genau einem Element. Einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit genau zwei Elementen gibt es aber nicht. Denn ein solcher Vektorraum V müsste neben dem Nullvektor 0_V noch ein weiteres Element $v \neq 0_V$ enthalten. Es zeigt sich nun, dass die Elemente der Form αv mit $\alpha \in \mathbb{R}$ alle verschieden sind. Setzen wir nämlich $\alpha v = \beta v$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ voraus, dann gilt $(\beta - \alpha)v = \beta v - \alpha v = 0_V$, und aus Prop. (4.2) und $v \neq 0_V$ folgt $\beta - \alpha = 0$, also $\alpha = \beta$. Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Element $v \neq 0_V$ ist also immer eine unendliche Menge, weil $\mathbb{R} \to V$, $\alpha \mapsto \alpha v$ eine injektive Abbildung und $\mathbb{R}$ unendlich ist.

zu (c) Laut Prop. (5.7) ist durch $\phi_A(v) = Av$ (Matrix-Vektor-Multiplikation) eine lineare Abbildung $K^n \to K^m$ gegeben. Ist $A = E^{(n)}$, dann gilt $\phi_A(v) = E^{(n)}v = v$ für alle $v \in K^n$. Man erhält in diesem Fall also die identische Abbildung id_{K^n}. Ist $A = \mathbf{0^{(m \times n)}}$, dann gilt $\phi_A(v) = \mathbf{0^{(m\times n)}v} = \mathbf{0_{K^m}}$ für alle $v \in K^n$. Diese Abbildung bildet also alle Vektoren aus K^n auf den Nullvektor in K^m ab.

zu (d) Die Abbildung f ist nicht verträglich mit der Vektoraddition auf $\mathbb{R}$. Zum Beispiel gilt $f(1+1) = f(2) = 2^2 - 1 = 3$ und $f(1) + f(1) = (1^2 - 1) + (1^2 - 1) = 0$, also $f(1+1) \neq f(1) + f(1)$. Alternativ kann man auch zeigen, dass f mit der skalaren Multiplikation nicht verträglich ist. Es gilt $f(2 \cdot 1) = f(2) = 1$, aber $2 \cdot f(1) = 2 \cdot 0 = 0$, also $f(2 \cdot 1) \neq 2 \cdot f(1)$.

zu (e) Sei $U = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Dann ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^2$ aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Denn wegen $0_{\mathbb{C}^2} = (0, 0)$ ist $0_{\mathbb{C}^2}$ in U enthalten. Sind $v, w \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben, dann gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $v = (a, 0)$ und $w = (b, 0)$, und es folgt $v + w = (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \in U$ und $\lambda v = \lambda(a, 0) = (\lambda a, 0) \in U$ wegen $a+b \in \mathbb{R}$ und $\lambda a \in \mathbb{R}$. Die Teilmenge ist aber kein Untervektorraum von $\mathbb{C}^2$ aufgefasst als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Denn beispielsweise ist $(1, 0)$ in U enthalten, der Vektor $i \cdot (1, 0) = (i, 0)$ wegen $i \notin \mathbb{R}$ aber nicht.

Aufgabe 1

zu (a) Zum Nachweis der Linearität von f_1 seien $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Es gilt

$$f_1((x,y) + (u,v)) \quad = \quad f_1(x+u, y+v) \quad = \quad (3(x+u) + 2(y+v), 4(x+u) + (y+v)) \quad =$$

$$(3x + 2y, 4x + y) + (3u + 2v, 4u + v) \quad = \quad f_1(x, y) + f_1(u, v)$$

und $f_1(\lambda(x, y)) = f_1(\lambda x, \lambda y) = (3\lambda x + 2\lambda y, 4\lambda x + \lambda y) = \lambda(3x + 2y, 4x + y) = \lambda f_1(x, y)$. Also ist die Abbildung tatsächlich linear. Zum Nachweis der Injektivität seien $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = f(u, v)$.

Dann gilt $(3x+2y, 4x+y) = (3u+2v, 4u+v)$, also $3x+2y = 3u+2v$ und $4x+y = 4u+v$. Subtraktion des zweifachen der zweiten Gleichung von der ersten liefert $-5x = -5u$ und $x = u$, und durch Einsetzen erhalten wir $4u+y = 4x+y = 4u+v$ und $y = v$, insgesamt also $(x,y) = (u,v)$. Damit ist die Injektivität nachgewiesen.

Zum Nachweis der Surjektivität sei $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben. Gesucht wird ein Paar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(3x+2y, 4x+y) = f_1(x,y) = (r,s)$. Subtraktion des Zweifachen der Gleichung $4x+y = s$ von $3x+2y = r$ liefert $-5x = r-2s$ und $x = -\frac{1}{5}r + \frac{2}{5}s$. Einsetzen liefert $y = s - 4x = s + \frac{4}{5}r - \frac{8}{5}s = \frac{4}{5}r - \frac{3}{5}s$. Damit haben wir ein Urbild von (r,s) gefunden, denn es gilt

$$f_1(x,y) \quad = \quad f_1(-\tfrac{1}{5}r+\tfrac{2}{5}s, \frac{4}{5}r-\tfrac{3}{5}s) \quad = \quad (3(-\tfrac{1}{5}r+\tfrac{2}{5}s)+2(\tfrac{4}{5}r-\tfrac{3}{5}s), 4(-\tfrac{1}{5}r+\tfrac{2}{5}s)+(\tfrac{4}{5}r-\tfrac{3}{5}s)) \quad = \quad (r,s).$$

Als bijektive lineare Abbildung ist f_1 ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

zu (b) Wäre f_2 linear, dann müsste $f_2(0_V) = 0_W$, also $f_2(0,0) = (0,0)$ gelten. Es ist aber $f_2(0,0) = (7\cdot 0+14\cdot 0-1, 0+2\cdot 0+5) = (-1,5)$. Wäre f_2 surjektiv, dann gäbe es ein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f_2(x,y) = (0,0)$. Aber dies würde $7x+14y-1 = 0$ und $x+2y+5 = 0$ bedeuten. Subtraktion des 7-fachen der zweiten Gleichung von der ersten liefert $-1-7\cdot 5 = 0$, also $-36 = 0$. Der Widerspruch zeigt, dass kein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f_2(x,y) = (0,0)$ existiert, die Abbidlung also nicht surjektiv ist. Die Abbildung ist auch nicht injektiv, denn es gilt $f_2(2,-1) = (7\cdot 2+14(-1)-1, 2+2(-1)+5) = (-1,5) = f_2(0,0)$, aber $(2,-1) \neq (0,0)$. Als nicht-lineare Abbildung ist f_2 auch kein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

zu (c) Wäre f_3 linear, dann müsste $f_3(2\cdot 1) = 2\cdot f_3(1)$ gelten. Es gilt aber $f_3(2\cdot 1) = f_3(2) = 8$ und $2\cdot f_3(1) = 2\cdot 1 = 2$. Aus der Analysis einer Variablen ist bekannt, dass die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ bijektiv ist, mit der Wurzelfunktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \sqrt[3]{x}$ als Umkehrfunktion. Als nicht-lineare Abbildung ist f_2 aber kein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

zu (d) Zum Nachweis der Linearität seien $A_1, A_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Es gilt $f_4(A_1+A_2) = (A_1+A_2)B = A_1B + A_2B = f_4(A_1)+f_4(A_2)$ und $f_4(\lambda A_1) = (\lambda A_1)B = \lambda(A_1B) = \lambda f_4(A_1)$. Zum Nachweis der Bijektivität bemerken wir zunächst, dass die Matrix B invertierbar ist, mit $B^{-1} = B$: Es gilt

$$B\cdot B \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \mathrm{I}^{(2)}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die Abbildung f_4 ihre eigene Umkehrabbildung ist: Für alle $A \in V$ gilt $(f_4 \circ f_4)(A) = f_4(f_4(A)) = f_4(AB) = AB^2 = A\mathrm{I}^{(2)} = A = \mathrm{id}_V(A)$. Also ist f bijektiv, insbesondere surjektiv und injektiv. Weil f zudem linear ist, handelt es sich insgesamt um einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

Aufgabe 2

Aus der Vorlesung ist bereits bekannt, dass für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$ das Tripel $(K^n, +, \cdot)$ mit der komponentenweisen Addition $+$ auf K^n und der komponentenweisen skalaren Multiplikation $\cdot$ ein K-Vektorraum ist. Insbesondere ist $(K^n, +)$ eine abelsche Gruppe. Dies zeigt, dass $V = \mathbb{R}^2$ mit der angegebenen Verknüpfung $+$ eine abelsche Gruppe ist. Die Bedingung (i) in der Vektorraum-Definition ist also erfüllt.

Um zu zeigen, dass auch die Bedindungen (ii)(a),(b),(c) für $(V, +, *)$ erfüllt sind, seien $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Die Rechnungen

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) * (a_1, a_2) \quad &= \quad ((\lambda + \mu)a_1, 0) \quad = \quad (\lambda a_1 + \mu a_1, 0) \quad = \quad (\lambda a_1, 0) + (\mu a_1, 0) \\ &= \quad \lambda * (a_1, a_2) + \mu * (a_1, a_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lambda * ((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) \quad = \quad \lambda * (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \quad = \quad (\lambda(a_1 + b_1), 0) \\ &= \quad (\lambda a_1 + \lambda b_1, 0) \quad = \quad (\lambda a_1, 0) + (\lambda b_1, 0) \quad = \quad \lambda * (a_1, a_2) + \lambda * (b_1, b_2) \end{aligned}$$

und

$$\lambda * (\mu * (a_1, a_2)) \quad = \quad \lambda * (\mu a_1, 0) \quad = \quad (\lambda \mu a_1, 0) \quad = \quad (\lambda \mu) * (a_1, a_2)$$

zeigen, dass auch diese Bedingungen erfüllt sind. Die Bedingung (ii)(d), welche besagt, dass $1 * (a_1, a_2) = (a_1, a_2)$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt sein soll, gilt aber nicht: Zum Beispiel ist $1 * (1, 1) = (1 \cdot 1, 0) = (1, 0) \neq (1, 1)$.

Aufgabe 3

zu (a) Um zu zeigen, dass U ein Untervektorraum von V ist, seien $f, g \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Wegen $f, g \in U$ gilt $f(x, y) + f(x + 1, y) = 0$ und $g(x, y) + g(x + 1, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Somit gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}$ auch

$$\begin{aligned} (f + g)(x, y) + (f + g)(x + 1, y) \quad &= \quad f(x, y) + g(x, y) + f(x + 1, y) + g(x + 1, y) \quad = \\ f(x, y) + f(x + 1, y) + g(x, y) + g(x + 1, y) \quad &= \quad 0 + 0 \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

und somit $f + g \in U$. Ebenso gilt

$$(\lambda f)(x, y) + (\lambda f)(x+1, y) \quad = \quad \lambda f(x, y) + \lambda f(x+1, y) \quad = \quad \lambda \cdot (f(x, y) + f(x+1, y)) \quad = \quad \lambda \cdot 0 \quad = \quad 0$$

also $\lambda f \in U$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Nullvektor 0_V von V durch die Nullabbildung gegeben ist, also durch die Abbildung mit $0_V(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt $0_V(x, y) + 0_V(x+1, y) = 0 + 0 = 0$, also ist 0_V ebenfalls Element von U. Damit sind alle Eigenschaften eines Untervektorraums für die Teilmenge $U \subseteq V$ nachgewiesen.

zu (b) Für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $0_V(x + 1, y) = 0 \neq 0 + 1 = 0_V(x, y) + 1$. Dies zeigt, dass 0_V kein Element von U ist. Da U den Nullvektor von V nicht enthält, ist U kein Untervektorraum von V.

zu (c) Bekanntlich ist der Nullvektor von $V = \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ die Nullmatrix $\mathbf{0}^{(2)}$. Es gilt $\mathbf{0}^{(2)} B = \mathbf{0}^{(2)}$, also ist $0_V = \mathbf{0}^{(2)}$ in U enthalten. Zum Nachweis der anderen beiden Eigenschaften eines Untervektorraums seien $A_1, A_2 \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Wegen $A_1, A_2 \in U$ gilt $A_1 B = \mathbf{0}^{(2)}$ und $A_2 B = \mathbf{0}^{(2)}$. Daraus folgt $(A_1 + A_2)B = A_1 B + A_2 B = \mathbf{0}^{(2)} + \mathbf{0}^{(2)} = \mathbf{0}^{(2)}$ und somit $A_1 + A_2 \in U$. Ebenso gilt $(\lambda A_1)B = \lambda(A_1 B) = \lambda \mathbf{0}^{(2)} = \mathbf{0}^{(2)}$ und damit $\lambda A_1 \in U$.