Lineare Algebra

— Lösung Blatt 5 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Seien $v, w \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ vorgegeben, $\lambda = a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $g(v+w) = g(v)+g(w)$ und $g(\lambda v) = \lambda g(v)$. Die erste Gleichung erhält man durch die Rechnung

$$g(v+w) \quad = \quad f(v+w) - if(i(v+w)) \quad = \quad f(v+w) - if(iv+iw) \quad =$$
$$f(v) + f(w) - if(iv) - if(iw) \quad = \quad f - if(iv) + f(w) - if(iw) \quad = \quad g(v) + g(w)$$

die zweite durch

$$g(\lambda v) \quad = \quad f((a+ib)v) - if(i(a+ib)v) \quad = \quad f(av) + f(ibv) - if(iav) - if(-bv) \quad =$$
$$af(v) + bf(iv) - iaf(iv) + ibf(v) \quad = \quad (a+ib)f(v) - i(a+ib)f(iv) \quad =$$
$$\lambda f(v) - i\lambda f(iv) \quad = \quad \lambda(f(v) - if(iv)) \quad = \quad \lambda g(v).$$

Zu beachsten ist, dass der Faktor i nicht aus f „herausgezogen“ werden darf, weil f laut Angabe nur ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist, und kein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Ein verkürzter Beweis der Form

$$g(\lambda v) \quad = \quad f(\lambda v) - if(i\lambda v) \quad \overset{(*)}{=} \quad \lambda f(v) - \lambda \cdot if(iv) \quad = \quad \lambda(f(v) - if(iv)) \quad = \quad \lambda g(v)$$

ist deshalb nicht möglich; die Umformung an der Stelle $(*)$ ist unzulässig, weil f kein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist.

zu (b) Jeder Vektor $w \in \mathbb{C}^m$ lässt sich auf eindeutige Weise in der Form $w = w' + iw''$ schreiben, mit $w', w'' \in \mathbb{R}^m$. Für beliebige $w', w'' \in \mathbb{R}^m$ gilt nämlich die Äquivalenz

$$w = w' + iw'' \quad \Leftrightarrow \quad w_k = w'_k + iw''_k \text{ für } 1 \le k \le m \quad \Leftrightarrow \quad w'_k = \mathrm{Re}(w_k) \text{ und } w''_k = \mathrm{Im}(w_k) \text{ für } 1 \le k \le m,$$

wodurch die Komponenten von w' und w'' eindeutig festgelegt sind. Für jedes $v \in \mathbb{C}^n$ gibt es also eindeutig bestimmte Vektoren $f(v), h(v) \in \mathbb{R}^m$ mit $g(v) = f(v)+ih(v)$. Wir erhalten so zwei Abbildungen $f, h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^m$. Zunächst zeigen wir, dass f eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist. Für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$f(v+w) + ih(v+w) \quad = \quad g(v+w) \quad = \quad g(v) + g(w) \quad =$$
$$f(v) + ih(v) + f(w) + ih(w) \quad = \quad (f(v) + f(w)) + i(h(v) + h(w)).$$

Durch Vergleich der Realteile auf beiden Seiten erhalten wir $f(v+w) = f(v) + f(w)$. Ist nun zusätzlich $a \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$f(av) + ih(av) \quad = \quad g(av) \quad = \quad ag(v) \quad = \quad a(f(v) + ih(v)) \quad = \quad af(v) + iah(v).$$

Der Vergleich der Realteile liefert $f(av) = af(v)$. Also ist f tatsächlich eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

Nun überprüfen wir noch die Gleichung $g(v) = f(v) - if(iv)$ für jedes $v \in \mathbb{C}^n$. Nach Definition der Abbildungen f und h gilt $g(v) = f(v) + ih(v)$. Weil die Abbildung g ein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist, gilt außerdem $f(iv) + ih(iv) = g(iv) = ig(v) = if(v) + i^2h(v) = -h(v) + if(v)$. Durch Vergleich der Realteile auf beiden Seiten erhalten wir $f(iv) = -h(v)$. Daraus folgt $g(v) = f + ih(v) = f(v) - i(-h(v)) = f(v) - if(iv)$.

Aufgabe 2

Zunächst überprüfen wir, dass $(V \times V, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist. Zum Nachweis der Kommutativ- und Assoziativgesetze seien $(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v_3, w_3) \in V \times V$ vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((v_1, w_1) \oplus (v_2, w_2)) \oplus (v_3, w_3) &= (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \oplus (v_3, w_3) \overset{(*)}{=} \\ ((v_1 + v_2) + v_3, (w_1 + w_2) + w_3) &= (v_1 + (v_2 + v_3), w_1 + (w_2 + w_3)) = \\ (v_1, w_1) \oplus (v_2 + v_3, w_2 + w_3) &= (v_1, w_1) \oplus ((v_2, w_2) \oplus (v_3, w_3)) \end{aligned}$$

wobei an der Stelle $(*)$ verwendet wurde, dass für die Vektoraddition auf V das Assoziativgesetz gilt. Ebenso erhalten wir

$$(v_1, w_1) \oplus (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \overset{(**)}{=} (v_2 + v_1, w_2 + w_1) = (v_2, w_2) \oplus (v_1, w_1)$$

wobei an der Stelle $(**)$ verwendet wurde, dass für die Vektoraddition auf V das Kommutativgesetz gültig ist. Durch $(0_V, 0_V)$ ist ein Neutralelement in $V \times V$ gegeben, denn für alle $(v_1, w_1) \in V \times V$ gilt

$$(v_1, w_1) \oplus (0_V, 0_V) = (v_1 + 0_V, w_1 + 0_V) = (v_1, w_1)$$

und auf Grund der bereits bewiesenen Kommutativität auch $(0_V, 0_V) \oplus (v_1, w_1) = (v_1, w_1)$. Für jedes $(v_1, w_1) \in V \times V$ ist $(-v_1, -w_1)$ ein Negatives, denn es gilt

$$(v_1, w_1) \oplus (-v_1, -w_1) = (v_1 + (-v_1), w_1 + (-w_1)) = (0_V, 0_V)$$

und auf Grund der bereits bewiesenen Kommutativität auch $(-v_1, -w_1) \oplus (v_1, w_1) = (0_V, 0_V)$.

Nun überprüfen wir die übrigen Vektorraum-Axiome. Es seien $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times V$, $\lambda = a + ib$ und $\mu = c + id$ vorgegeben, mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Zu überprüfen ist

(i) $(\lambda + \mu) * (v_1, w_1) = \lambda * (v_1, w_1) \oplus \mu * (v_1, w_1)$

(ii) $\lambda * ((v_1, w_1) \oplus (v_2, w_2)) = \lambda * (v_1, w_1) \oplus \lambda * (v_2, w_2)$

(iii) $(\lambda\mu) * (v_1, w_1) = \lambda * (\mu * (v_1, w_1))$

(iv) $1 * (v_1, w_1) = (v_1, w_1)$

zu (i)

$$(\lambda + \mu) * (v_1, w_1) = ((a + c) + i(b + d)) * (v_1, w_1) = ((a + c)v_1 - (b + d)w_1, (b + d)v_1 + (a + c)w_1)$$

$$\begin{aligned} \lambda * (v_1, w_1) \oplus \mu * (v_1, w_1) &= (a + ib) * (v_1, w_1) \oplus (c + id) * (v_1, w_1) = \\ (av_1 - bw_1, bv_1 + aw_1) \oplus (cv_1 - dw_1, dv_1 + cw_1) &= (av_1 - bw_1 + cv_1 - dw_1, bv_1 + aw_1 + dv_1 + cw_1) = \\ &(a + c)v_1 - (b + d)w_1, (b + d)v_1 + (a + c)w_1) \end{aligned}$$

Also stimmen beiden Seiten der Gleichung überein.

zu (ii)

$$\lambda * ((v_1,w_1) \oplus (v_2,w_2)) \quad = \quad (a+ib) * ((v_1+v_2, w_1+w_2)) \quad =$$
$$(a(v_1+v_2) - b(w_1+w_2), b(v_1+v_2) + a(w_1+w_2))$$

$$\lambda * (v_1,w_1) \oplus \lambda * (v_2,w_2) \quad = \quad (a+ib) * (v_1,w_1) \oplus (a+ib) * (v_2,w_2) \quad =$$
$$(av_1 - bw_1, bv_1 + aw_1) \oplus (av_2 - bw_2, bv_2 + aw_2) \quad = \quad (av_1 - bw_1 + av_2 - bw_2, bv_1 + aw_1 + bv_2 + aw_2) \quad =$$
$$(a(v_1+v_2) - b(w_1+w_2), b(v_1+v_2) + a(w_1+w_2))$$

zu (iii)

$$(\lambda\mu) * (v_1,w_1) \quad = \quad ((a+ib)(c+id)) * (v_1,w_1) \quad = \quad ((ac-bd) + i(bc+ad)) * (v_1,w_1) \quad =$$
$$((ac-bd)v_1 - (bc+ad)w_1, (bc+ad)v_1 + (ac-bd)w_1)$$

$$\lambda * (\mu * (v_1,w_1)) \quad = \quad (a+ib) * ((c+id) * (v_1,w_1)) \quad = \quad (a+ib) * (cv_1 - dw_1, dv_1 + cw_1) \quad =$$
$$(a(cv_1 - dw_1) - b(dv_1 + cw_1), b(cv_1 - dw_1) + a(dv_1 + cw_1)) \quad =$$
$$((ac-bd)v_1 - (bc+ad)w_1, (bc+ad)v_1 + (ac-bd)w_1)$$

zu (iv) $\quad 1 * (v_1,w_1) = (1+0i)(v_1,w_1) = (1 \cdot v_1 - 0 \cdot w_1, 0 \cdot v_1 + 1 \cdot w_1) = (v_1,w_1)$

Aufgabe 3

Zunächst zeigen wir, dass die Bildmengen von $\oplus$ und $\odot$ in A enthalten sind. Seien dazu $v,w \in A$ und $\lambda \in K$ vorgegeben. Zu zeigen ist $v \oplus w \in A$ und $\lambda \odot v \in A$. Nach Proposition (6.12) existiert ein Untervektorraum U von V mit $A = p + U$. Wegen $v,w \in A$ gibt es also Vektoren $v',w' \in U$ mit $v = p + v'$ und $w = p + w'$. Weil U ein Untervektorraum von V ist, sind $v' + w'$ und $\lambda v'$ in U enthalten. Somit liegt auch $v \oplus w = v + w - p = p + v' + p + w' - p = p + (v' + w')$ in $p + U = A$, und ebenso ist $\lambda \odot v = (1-\lambda)p + \lambda v = (1-\lambda)p + \lambda(p + v') = p + \lambda v'$ in $p + U = A$ enthalten.

Um zu zeigen, dass $(A, \oplus, \odot)$ ein K-Vektorraum ist, zeigen wir zunächst, dass $(A, \oplus, \odot)$ eine abelsche Gruppe ist, mit $0_A = p$ als Neutralelement. Zum Nachweis des Assoziativgesetzes seien $u,v,w \in A$ vorgegeben. Dann gilt

$$(u \oplus v) \oplus w \quad = \quad (u + v - p) \oplus w \quad = \quad (u + v - p) + w - p \quad = \quad u + (v + w - p) - p$$
$$= \quad u + (v \oplus w) - p \quad = \quad u \oplus (v \oplus w).$$

Ebenso gilt $v \oplus w = v + w - p = w + v - p = w \oplus v$ für alle $v,w \in A$. Somit ist auch das Assoziativgesetz erfüllt. Für alle $v \in A$ ist außerdem $0_A \oplus v = p \oplus v = p + v - p = v$. Dies zeigt, dass $0_A = p$ in $(A, \oplus)$ ein Neutralelement ist. Für jeden Vektor $v \in A$ gilt außerdem noch

$$v \oplus ((-1_K) \oplus v) \quad = \quad v \oplus ((1_K + 1_K)p - 1_K v) \quad = \quad v \oplus (p + p - v) \quad =$$
$$v + p + p - v - p \quad = \quad p \quad = \quad 0_A \quad ,$$

es ist $(-1_K) \oplus v$ also jeweils ein Inverses von v in $(A, \oplus)$. Damit ist der Nachweis der Gruppenaxiome abgeschlossen.

Seien nun $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in A$ vorgegeben. Zu überprüfen ist noch

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & (\lambda+\mu)\odot v = \lambda\odot v \oplus \mu\odot v \\ \text{(ii)} & \lambda\odot(v\oplus w) = \lambda\odot v\oplus\lambda\odot w \\ \text{(iii)} & (\lambda\mu)\odot v = \lambda\odot(\mu\odot v) \\ \text{(iv)} & 1_K\odot v = v \end{array}$$

zu (i) $(\lambda+\mu)\odot v = (1_K-(\lambda+\mu))p+(\lambda+\mu)v = (1_K-\lambda)p+\lambda v+(1_K-\mu)p+\mu v-p = \lambda\odot v+\mu\odot v.$

zu (ii) $\lambda\odot(v\oplus w) = \lambda\odot(v+w-p) = (1_K-\lambda)p+\lambda(v+w-p) = (1_K-\lambda-\lambda)p+\lambda v+\lambda w = (1_K-\lambda)p+\lambda v+(1_K-\lambda)p+\lambda w-p = (\lambda\odot v)+(\lambda\odot w)-p = (\lambda\odot v)\oplus(\lambda\odot w).$

zu (iii) $\lambda\odot(\mu\odot v) = \lambda\odot((1_K-\mu)p+\mu v) = (1_K-\lambda)p+\lambda((1_K-\mu)p+\mu v) = p-\lambda p+\lambda p-\lambda\mu p+\lambda\mu v = (1_K-\lambda\mu)p+\lambda\mu v = (\lambda\mu)\odot v.$

zu (iv) $1_K\odot v = (1_K-1_K)p+1_K v = 0_K p+1_K v = v$