

Lineare Algebra

— Lösung Blatt 3 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Das Matrixprodukt AB kann gebildet werden, denn die Spaltenzahl von A ist gleich der Zeilenzahl von B . Die Matrix AB ist dann eine 3×4 -Matrix. Das Produkt BA kann dagegen nicht gebildet werden, denn die Spaltenzahl von B (4) ist ungleich der Zeilenzahl von A (3).

zu (b) Das Distributivgesetz ist nach Proposition (2.6) auf jeden Fall erfüllt. Beim Assoziativ- und Kommutativgesetz muss man unterscheiden, ob sich das Gesetz auf die Addition oder die Multiplikation bezieht. Assoziativ- und Kommutativgesetz für die Addition wurde in der Vorlesung nicht formuliert, ist aber gültig und lässt sich leicht überprüfen: Der Eintrag der Matrix $A + B$ an einer Position (i, j) ist $a_{ij} + b_{ij}$, die Matrix $B + A$ hat an derselben Stelle den Eintrag $b_{ij} + a_{ij}$, und es gilt $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, weil das Kommutativgesetz in jedem Körper gültig ist. Es gilt also tatsächlich $A + B = B + A$. Ebenso folgt das Assoziativgesetz $(A + B) + C = A + (B + C)$ der Addition aus der Gleichung $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$, an jeder Position (i, j) .

Das Assoziativgesetz der Multiplikation ist für Matrizen nach Proposition (2.6) gültig. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Kommutativgesetz der Multiplikation für Matrizen im Allgemeinen nicht gültig ist.

zu (c) Wenn man eine vierzeilige Matrix A mit der 3×4 -Matrix E von links multipliziert, dann ist das Ergebnis einer dreizeilige Matrix. Die Gleichung $EA = A$ ist also nie erfüllt.

zu (d) Bestandteil der Definition einer normierten ZSF mit Kennzahlen $r, j_1, \dots, j_r$ war die Bedingung, dass sich an den Positionen (k, j_k) für $1 \leq k \leq r$ jeweils eine 1 befindet. Insbesondere darf die erste Zeile der Matrix nicht Null sein. Somit kann die Basismatrix $B_{ij}^{(m \times n)}$ nur dann in normierter ZSF vorliegen, wenn $i = 1$ ist. Die Matrizen $B_{1j}^{(m \times n)}$ mit $1 \leq j \leq n$ sind tatsächlich Matrizen in normierter ZSF. Die Kennzahlen lauten jeweils $r = 1$ und $j_1 = j$.

Aufgabe 1

zu (a) Das Produkt AU mit einer Matrix U kann genau dann gebildet werden, wenn die Matrix U aus vier Zeilen besteht. Dies ist nur für die Matrix C erfüllt. Es gilt

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 55 \end{pmatrix}$$

Das Produkt UA existiert genau dann, wenn U eine zweispaltige Matrix ist. Dies trifft auf die Matrizen B und E zu. Es gilt

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 & 3 & 41 \\ 6 & -20 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$EA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 21 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt BU kann für jede Matrix mit zwei Zeilen gebildet werden. Wir haben BA bereits berechnet, außerdem kann B mit sich selbst multipliziert werden.

$$BB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 21 \\ -28 & -3 \end{pmatrix}$$

Das Produkt UB existiert für jede Matrix mit zwei Spalten, dies trifft neben B auch auf E zu.

$$EB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt CU existiert genau dann, wenn U aus einer einzelnen Zeile besteht. Hier ist E die einzige Matrix mit dieser Eigenschaft.

$$CE = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -9 \\ 0 & -15 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Für das Produkt UC benötigen wir eine Matrix U mit vier Spalten. Das Produkt AC wurde bereits berechnet, eine weitere Matrix mit genau vier Spalten gibt es hier nicht. Für das Produkt DU würden wir fünf Zeilen benötigen, aber dies trifft auf keine der Matrizen A, B, C, D, E zu. Für das Produkt UD müsste U drei Spalten haben, was wiederum für keine der Matrizen erfüllt ist. Schließlich kann auch das Produkt EE nicht gebildet werden, weil bei E Spalten- und Zeilenzahl verschieden sind.

zu (b) Multiplizieren wir die linke Seite aus, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a & b+2c \\ 0 & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich der Einträge auf beiden Seiten erhalten wir das LGS $a = 4, b + 2c = 5, 3c = 6$. Die dritte Gleichung liefert $c = 2$, Einsetzen in die zweite ergibt $b + 2 \cdot 2 = 5 \Leftrightarrow b = 1$. Also ist $(a, b, c) = (4, 1, 2)$ ein Tupel mit der gewünschten Eigenschaft.

Aufgabe 2

zu (a) Offenbar genügt es, eine symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{R}}$ ungleich der Nullmatrix zu finden und anschließend die Menge aller skalaren Vielfachen zu bilden. Beispielsweise ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine symmetrische Matrix, und demzufolge ist

$$\left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

eine unendliche Menge symmetrischer Matrizen.

zu (b) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch, und man findet durch Ausprobieren schnell ein Gegenbeispiel. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die beiden Faktoren auf der linken Seite sind offenbar symmetrisch, die Matrix rechts aber nicht, denn es gilt

$${}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

zu (c) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,K}$. Dann sind die Einträge der Transponierten $B = {}^t A$ gegeben durch $b_{ij} = a_{ji}$ für $1 \leq i, j \leq n$. Setzen wir $C = B + A = {}^t A + A$, dann gilt $c_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = a_{ji} + a_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq n$. Die Transponierte $D = {}^t C$ hat die Einträge $d_{ij} = c_{ji} = a_{ij} + a_{ji} = a_{ji} + a_{ij} = c_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq n$. Es gilt also ${}^t C = C$; dies zeigt, dass C symmetrisch ist.

Aufgabe 3

zu (a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS ist gegeben durch

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \bar{8} & \bar{5} & \bar{6} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{9} & \bar{7} & \overline{10} & \bar{9} & \bar{1} \\ \bar{8} & \bar{5} & \bar{7} & \bar{6} & \bar{8} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 5, \mathbb{F}_{11}}.$$

zu (b)

$$\begin{pmatrix} \bar{8} & \bar{5} & \bar{6} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{9} & \bar{7} & \overline{10} & \bar{9} & \bar{1} \\ \bar{8} & \bar{5} & \bar{7} & \bar{6} & \bar{8} \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{1, \bar{7}}} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{9} & \overline{10} & \bar{6} \\ \bar{9} & \bar{7} & \overline{10} & \bar{9} & \bar{1} \\ \bar{8} & \bar{5} & \bar{7} & \bar{6} & \bar{8} \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{1, \bar{2}, \bar{2}}, A_{1, \bar{3}, \bar{3}}} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{9} & \overline{10} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{7} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{M_{2, \bar{2}}} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{9} & \overline{10} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{2, \bar{3}, \overline{10}}} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{9} & \overline{10} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{2, \bar{1}, \bar{2}}} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{5} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix liegt in normierter ZSF vor, mit Kennzahlen $r = 2$, $j_1 = 1$, $j_2 = 3$.

zu (c) Wir verteilen die Einträge der letzten Spalte auf die Positionen j_1 und j_2 eines Vektors in $\mathbb{F}_{11}^4$ und erhalten die spezielle Lösung

$$v = \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{0} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \end{pmatrix}.$$

zu (d) Nach dem bekannten Schema aus der Vorlesung, angewendet auf die umgeformte Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

bilden wir zunächst die Menge $S = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j_1, j_2\} = \{2, 4\}$ und definieren die Lösungsvektoren

$$b_2 = \begin{pmatrix} \bar{9} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_4 = \begin{pmatrix} \bar{6} \\ \bar{0} \\ \bar{8} \\ \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann $\mathcal{L}^{\text{hom}} = \{\lambda_2 b_2 + \lambda_4 b_4 \mid \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{F}_{11}\}$.

zu (e) Nach Prop. (1.6) ist die gesamte Lösungsmenge des inhomogenen Systems gegeben durch

$$\mathcal{L} = \{v + \lambda_2 v_2 + \lambda_4 v_4 \mid \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{F}_{11}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{0} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \bar{9} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} \bar{6} \\ \bar{0} \\ \bar{8} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \mid \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{F}_{11} \right\}.$$