Lineare Algebra

— Lösung Blatt 0 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die Relation ist reflexiv, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x-x| = |0| = 0 \leq 1$ und somit xRx. Die Relation ist auch symmetrisch, denn sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit xRy, dann gilt $|x-y| \leq 1$. Es folgt $|y-x| = |(-1)(x-y)| = |x-y| \leq 1$ und somit yRx. Die Relation ist aber nicht transitiv, denn beispielsweise gilt $1R2$ (wegen $|1-2| = |-1| = 1 \leq 1$) und $2R3$ (wegen $|2-3| = |-1| = 1 \leq 1$), aber nicht $1R3$ (wegen $|1-3| = |-2| = 2 > 1$). Die Implikation $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ ist also für $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ nicht erfüllt. Weil R nicht transitiv ist, handelt es sich auch nicht um eine Äquivalenzrelation.

zu (b) Die Lösungsmenge der ersten Gleichung ist $\mathcal{L}_1 = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, die Lösungsmenge der zweiten ist $\mathcal{L}_2 = \{(a, \frac{1}{5}) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

zu (c) Die Lösungsmenge des LGS kann sich durch diesen Schritt verändern. Geht man beipielsweise vom System $x = 1, y = 6$ aus, so hat dieses die Lösungsmenge $\{(1, 6)\}$. Multipliziert man nun die zweite Gleichung mit 0, so erhält man das System $x = 1, 0 \cdot y = 0 \cdot 6$. Dies hat die Lösungsmenge $\{(1, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

zu (d) Auch eine solche Umformung verändert die Lösungsmenge, ist also unzulässig. Beispielsweise wird das System $x = 1, y = 6$ durch diesen Schritt zu $y = 1, x = 6$ verändert. Die neue Lösungsmenge ist dann $\{(6, 1)\}$ statt $\{(1, 6)\}$.

Aufgabe 1

Einsetzungsverfahren:
Die zweite Gleichung kann zu $x_2 = -4 + 2i + ix_1$ umgestellt werden. Einsetzen in die ersten Gleichung liefert

$$3x_1 - 2(-4 + 2i + ix_1) = 13 - 3i \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1 + 8 - 4i - 2ix_1 = 13 - 3i \quad \Leftrightarrow$$

$$(3-2i)x_1 + 8 - 4i = 13 - 3i \quad \Leftrightarrow \quad (3-2i)x_1 = 5 + i \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{5+i}{3+2i} = \frac{(5+i)(3+2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{(5+i)(3+2i)}{3^2+2^2} = \frac{15+3i+10i-2}{13} = \frac{13+13i}{13} = 1+i$$

und $x_2 = -4 + 2i + ix_1 = -4 + 2i + i(1+i) = -4 + 2i + i - 1 = -5 + 3i$. Die gesuchte Lösungsmenge ist also $\mathcal{L} = \{(1+i, -5+3i)\}$.

Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x_1 & - & 2x_2 & = & 13-3i & \mid \cdot (-i) \\ ix_1 & - & x_2 & = & 4-2i & \mid \cdot 3 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrl} -3ix_1 & + & 2ix_2 & = & -3-13i & \\ 3ix_1 & - & 3x_2 & = & 12-6i & \mid + I \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrl} -3ix_1 & + & 2ix_2 & = & -3-13i & \\ & & (-3+2i)x_2 & = & 9-19i & \mid \cdot (-3+2i)^{-1} \end{array} \quad \overset{(*_1)}{\Leftrightarrow} \quad \begin{array}{rcrcrl} -3ix_1 & + & 2ix_2 & = & -3-13i & \mid + (-2i) \cdot II \\ & & x_2 & = & -5+3i & \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\overset{(*_2)}{\Leftrightarrow} \quad \begin{array}{rcr} x_1 & = & 1+i \\ x_2 & = & -5+3i \end{array}$$

Dabei muss an der Stelle $(*_1)$ die Nebenrechnung

$$(-3+2i)^{-1}(9-19i) \quad = \quad \frac{(9-19i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} \quad = \quad \frac{-65+39i}{(-3)^2+2^2} \quad = \quad \tfrac{1}{13}(-65+39i) \quad = \quad -5+3i$$

und an der Stelle $(*_2)$ die Nebenrechnung $(-3i)^{-1}(3-3i) = \frac{1}{3}i(3-3i) = i+1 = 1+i$ ausgeführt werden. Wieder erhalten wir $\mathcal{L} = \{(1+i, -5+3i)\}$ als Lösungsmenge.

Aufgabe 2

zu (a) Wir müssen zeigen, dass R_X reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
Reflexivität: Sei $x \in X$. Dann ist nach Definition (x,x) in R_X enthalten es gilt also xR_Xx.
Symmetrie: Seien $x, y \in X$ mit xR_Xy, also $(x,y) \in R_X$. Da R_X nur Paare enthält, deren Komponenten übereinstimmen, gilt dann $x = y$. Es folgt $(y,x) = (x,x) = (x,y) \in R_X$, also yR_Xx.
Transitivität: Seien $x, y, z \in X$ mit xR_Xy und yR_Xz. Wie oben bemerkt, folgt aus $(x,y) \in R_X$ die Gleichung $x = y$, und aus $(y,z) \in yR_Xz$ folgt ebenso $y = z$. Aus $x = y$ und $y = z$ folgt $x = z$. Nach Definition von R_X ist $(x,z) = (x,x)$ in R_X enthalten, es gilt also xR_Xz.

zu (b) Sei $(x,y) \in R$ vorgegeben; zu zeigen ist $(x,y) \in R_X$. Aus xRy und der Symmetrie von R folgt yRx. Aus xRy, yRx und der Anti-Symmetrie wiederum folgt $x = y$, also $(x,y) = (x,x) \in R_X$, wie gewünscht. Zum Nachweis der Transitivität seien $x, y, z \in X$ mit xRy und yRz vorgegeben. Aus $(x,y) \in R$ und $R \subseteq R_X$ folgt $x = y$. Damit gilt $(x,z) = (y,z) \in R$ (wegen yRz) und somit xRz.

zu (c) Sei R eine anti-symmetrische Äquivalenzrelation auf X. Dann ist R insbesondere symmetrisch und anti-symmetrisch, es gilt also $R \subseteq R_X$ nach Teil (b). Zum Beweis von $R_X \subseteq R$ sei (x,x) ein beliebiges Element von R_X, mit $x \in X$. Weil R als Äquivalenzrelation insbesondere reflexiv ist, gilt xRx, also $(x,x) \in R$.

Aufgabe 3

Unzulässigkeit von (i):
Wir betrachten das System $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und führen die Umformung mit den Parametern $\lambda = 1$, $\mu = 0$ durch. Wir erhalten so das LGS $x_1 = 1$, $x_1 = 1$. Die Lösungsmenge des Systems vor der Umformung ist $\mathcal{L} = \{(1,2)\}$, nach der Umformung erhält man die Lösungsmenge $\mathcal{L}' = \{(1,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$.

Unzulässigkeit von (ii):
Wendet man die beschriebene Umformung mit $\lambda = \mu = 1$ auf das System $x_1 = 1$, $-x_1 = -1$ an, so erhält man das System $0 \cdot x_1 = 0$, $0 \cdot x_1 = 0$. Das LGS vor der Umformung hat die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{(1,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Das LGS nach der Umformung hat die Lösungsmenge $\mathcal{L}' = \mathbb{R}^2$.

Beantwortung der Frage am Ende der Aufgabe:
Ist $\mu \neq 0$, dann kann die Umformung (i) realisiert werden, indem man *erst* die zweite Gleichung mit μ multipliziert und dann das λ-fache der 1. Gleichung zur 2. Gleichung addiert. Weil beides Äquivalenzumformungen sind, wird die Lösungsmenge durch den Vorgang insgesamt nicht verändert. Ist dagegen $\mu = 0$, dann wird das System $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ immer durch das System $x_1 = 1$, $\lambda x_1 = \lambda$ ersetzt, und die ursprüngliche Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{(1,2)\}$ wird zu $\mathcal{L}' = \{(1,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Die Umformung (i) ist also genau dann zulässig, wenn $\mu \neq 0$ gilt. Der Wert von λ spielt für die Zulässigkeit keine Rolle.