

# Lösung Globalübungsblatt 12

## Aufgabe 3

zu (a)  $K$  Körper,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$

z.Bg.:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i) \quad (*)$$

Beweis durch vollst. Induktion über  $n \in \mathbb{N}$

Ind.-Anf.  $n=1$

Auf der linken Seite der Gleichung steht  $\det(1) = 1$ .

Rechts steht das leere Produkt, das per Konvention den Wert 1 hat.

$\Rightarrow$  Gleichung für  $n=1$  erfüllt

Ind.-Schluss  $n \mapsto n+1$

Sei  $n \in \mathbb{N}$ , setze (\*) für  $n$  voraus. Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K$ .

Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n+1} & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1} & \alpha_{n+1}^n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Addition des } (-\alpha_1)\text{-fachen der} \\ n\text{-ten Spalte zur } (n+1)\text{-ten} \end{array} = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} & 0 \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{n-1} & (\alpha_2 - \alpha_1) \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n+1} & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1} & (\alpha_{n+1} - \alpha_1) \alpha_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Addition des  $(-\alpha_1)$ -fachen der  $(n-1)$ -ten Spalte zur  $n$ -ten

=

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_2 & \dots & (\alpha_2 - \alpha_1) \alpha_2^{n-2} & \dots & (\alpha_2 - \alpha_1) \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_{n+1} & \dots & (\alpha_{n+1} - \alpha_1) \alpha_{n+1}^{n-1} & \dots & (\alpha_{n+1} - \alpha_1) \alpha_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \dots$$

Addition des  $(-\alpha_1)$ -fachen der ersten Spalte zur zweiten

=

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \dots & (\alpha_2 - \alpha_1) \alpha_2^{n-2} & \dots & (\alpha_2 - \alpha_1) \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_{n+1} - \alpha_1 & \dots & (\alpha_{n+1} - \alpha_1) \alpha_{n+1}^{n-1} & \dots & (\alpha_{n+1} - \alpha_1) \alpha_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Laplace'scher Entw.-satz

=

angewendet auf die 1. Zeile

$$(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \dots & (\alpha_2 - \alpha_1) \alpha_2^{n-2} & \dots & (\alpha_2 - \alpha_1) \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n+1} - \alpha_1 & \dots & (\alpha_{n+1} - \alpha_1) \alpha_{n+1}^{n-1} & \dots & (\alpha_{n+1} - \alpha_1) \alpha_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Multiplikativität der Determinante

in jeder Zeile

$$\prod_{k=2}^{n+1} (\alpha_k - \alpha_1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_{n+1} & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ind.-v.

$$= \prod_{k=2}^{n+1} (\alpha_k - \alpha_1) \cdot \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (\alpha_j - \alpha_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (\alpha_j - \alpha_i)$$



zu 1b) geg.  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq K$  ( $n$ -elementige Teilmenge)

$\beta_1, \dots, \beta_n \in K$  z.zg.: Es gibt genau ein Polynom vom Grad  $\leq n-1$

mit  $f(\alpha_j) = \beta_j$  für  $1 \leq j \leq n$ .

Sei  $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \in K[x]$  ein solches Polynom, mit  $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ . Dann gilt die Äquivalenz

$$f(\alpha_j) = \beta_j \text{ für } 1 \leq j \leq n \Leftrightarrow a_0 + a_1 \alpha_j + \dots + a_{n-1} \alpha_j^{n-1} = \beta_j \text{ für } 1 \leq j \leq n$$
$$\Leftrightarrow (a_0, \dots, a_{n-1}) \in K^n \text{ ist Lösung des inhom. LGS}$$

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) x = b$$

mit  $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  und  $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$

z.Bg. ist also die eindeutige Lösbarkeit dieses LGS

$\det V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \stackrel{(A)}{=} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0$ , da die  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  verschieden sind somit jeder Faktor  $\alpha_j - \alpha_i$  ungleich null ist.

$\Rightarrow V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ist invertierbar

$\Rightarrow$  Für jedes  $a \in K^n$  gilt die Äquivalenz

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) a = b \Leftrightarrow a = V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{-1} b.$$

Also ist das LGS eindeutig lösbar.

# Aufgabe 1

zu (a)

$$\det \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \alpha & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \alpha & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \alpha & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Laplace'scher Entw.-satz

=  
angewendet auf 4. Zeile

$$(-\bar{1})^{4+1} \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \bar{0} \\ \bar{0} & \alpha & \bar{1} \\ \bar{1} & \alpha & \bar{0} \end{pmatrix}$$

=  
 $\bar{1} = -\bar{1}$  in  $\mathbb{F}_4$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \bar{0} \\ \bar{0} & \alpha & \bar{1} \\ \bar{1} & \alpha & \bar{0} \end{pmatrix} = \bar{0} \quad (\text{da die Matrix zwei identische Zeilen hat})$$

zu (b)

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Entwicklung zur 1. Zeile

=

$$(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Entwicklung zur 1. Spalte

=

$$(-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{Entwicklung zur 2. Spalte}$$

$$= - \left( (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

Summe

$$= 3 \cdot (7 + 0 + 84 - 0 - 21 - 42) - 3 \cdot (9 + 0 + 1 - 6 - 6 - 0)$$

$$= 3 \cdot 28 - 3 \cdot (-2) = 84 + 6 = 90$$

## Aufgabe 2

zu (a)    geg.:  $A = (a_{ij}) \in M_{n, \mathbb{Z}}$     z.zg.:  $\det(A) \in \mathbb{Z}$

Leibniz-Formel  $\Rightarrow \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)}$

Für jedes  $\sigma \in S_n$  gilt  $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\}$  und  $a_{k, \sigma(k)} \in \mathbb{Z}$  für  $1 \leq k \leq n$ ,  
 somit  $\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)} \in \mathbb{Z}$ . Da alle Summanden in  $\mathbb{Z}$  liegen,  
 ist auch die Summe  $\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)}$  in  $\mathbb{Z}$  enthalten.

von  $A_{ji}$  ganzzahlig  $\forall i, j$ .  $\stackrel{a)}{=} \det(A_{ji}) \in \mathbb{Z} \quad \forall i, j$   
 $\Rightarrow \check{a}_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall i, j \Rightarrow \check{A} \in M_n, \mathbb{Z}$

Wegen  $A^{-1} \in \{ \check{A}, -\check{A} \}$  ist mit  $\check{A}$  auch  $A^{-1}$  eine ganzzahlige Matrix.