Lösung Globalübungsblatt 11

Aufgabe 1

zu (a) Anwendung des Gauß-Alg. auf die Matrix $A \in M_{6, \mathbb{F}_2}$

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} =: A'$$

A' hat zwei identische Zeilen $\Rightarrow \det(A') = 0$ (Eigenschaft „alternierend" der Determinantenfunktion)

Da sich die Determinante bei jeder Zeilenumformung nur um einen Faktor $\neq \bar{0}$ ändert, muss auch $\det(A) = \bar{0}$ sein.

zu (b) Erinnerung: Verknüpfungstafeln des Körpers $\mathbb{F}_4$

Addition

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	α	$\alpha+\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	α	$\alpha+1$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\alpha+\bar{1}$	α
α	α	$\alpha+\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\alpha+\bar{1}$	$\alpha+\bar{1}$	α	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Multiplikation

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	α	$\alpha+\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	α	$\alpha+\bar{1}$
α	$\bar{0}$	α	$\alpha+\bar{1}$	$\bar{1}$
$\alpha+\bar{1}$	$\bar{0}$	$\alpha+\bar{1}$	$\bar{1}$	α

Berechnung von α^2:

$\alpha \cdot (\alpha+\bar{1}) = \bar{1} \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha = \bar{1} \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha+\bar{1}$

Berechnung von $(\alpha+\bar{1})^2$:

$(\alpha+\bar{1})^2 = \alpha^2+\alpha+\alpha+\bar{1} = \alpha^2+\bar{1} = (\alpha+\bar{1})+\bar{1} = \alpha$

wichtig: Sowohl in $\mathbb{F}_2$ als auch in $\mathbb{F}_4$ gilt $\bar{1} = -\bar{1}$, es gilt in diesen Körpern also keinen Unterschied zwischen „+" und „−".

Aus diesem Grund können auch die unterschiedlichen Vorzeichen bei der Sarrus-Regel ignoriert werden.

$$B = \begin{pmatrix} \bar{1} & \alpha & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \alpha \\ \alpha & \alpha & \bar{1} \end{pmatrix}$$

$\bar{1} = -\bar{1}$ in $\mathbb{F}_4$

Sarrus-Regel $\Rightarrow$ $\det(B) = \bar{1}\cdot\bar{1}\cdot 1 + \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha + \bar{0}\cdot\bar{0}\cdot\alpha$
$+ \alpha\cdot\bar{1}\cdot\bar{0} + \alpha\cdot\alpha\cdot\bar{1} + \bar{1}\cdot\bar{0}\cdot\alpha = \bar{1} + \alpha^3 + \alpha^2 = \bar{1} + \alpha\cdot\alpha^2 + \alpha^2$
$= \bar{1} + \alpha\cdot(\alpha+\bar{1}) + (\alpha+\bar{1}) = \alpha^2 + \alpha + \alpha + \bar{1} + \bar{1} = \alpha^2 = \alpha + \bar{1}$

Aufgabe 2 $\quad M_n = (a_{ij})$, $a_{ij} = \delta_{n+1-i,j}$

zu (a) Berechnung von M_5

Sei $M_5 = (a_{ij})$. Für alle $i,j \in \{1,\dots,5\}$ gilt die Äquivalenz
$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \delta_{6-i,j} = 1 \Leftrightarrow j = 6-i \Leftrightarrow (i,j) \in \{(1,5),$
$(2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$$\Rightarrow M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu (b) Leibniz-Formel: Für jedes $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,K}$ gilt
$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} s_\sigma$, wobei $s_\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} \;\forall\, \sigma\in S_n$

<u>hier:</u> $M_n = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = \delta_{n+1-i,j}$ für $1 \le i,j \le n$

Sei $\sigma \in S_n$. Dann gilt die Äquivalenz

$$s_\sigma \neq 0 \iff \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} \neq 0 \iff a_{k,\sigma(k)} \neq 0 \text{ für } 1 \le k \le n$$

$$\iff \delta_{n+1-k,\sigma(k)} = 1 \text{ für } 1 \le k \le n \iff \sigma(k) = n+1-k \text{ für } 1 \le k \le n$$

Dies zeigt, dass σ durch die Bedingung $s_\sigma \neq 0$ eindeutig festgelegt ist: Es gilt $s_\sigma \neq 0 \iff \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>zu (c)</u> Leibniz-Formel $\Rightarrow$ $\det M_n = \sum_{\sigma \in M_n} s_\sigma \overset{(b)}{=} s_{\sigma_n} = \operatorname{sgn}(\sigma_n) \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma_n(k)}$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma_n) \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\delta_{n+1-k,\sigma_n(k)}}_{\substack{=1, \text{ da} \\ \sigma_n(k) = n+1-k \\ \text{für } 1 \le k \le n}} = \operatorname{sgn}(\sigma_n)$$

wobei $\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Es muss also noch $\operatorname{sgn}(\sigma_n)$ bestimmt werden. Dazu benötigen wir eine Darstellung von σ_n als Produkt von Transpositionen.

Beispiele:

$n=5$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 5) \circ (2\ 4) \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma_5) = (-1)^2 = 1$$

$n=6$

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 6) \circ (2\ 5) \circ (3\ 4)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma_6) = (-1)^3 = -1$$

$n = 7$

$$\sigma_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 7) \circ (2\ 6) \circ (3\ 5)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma_7) = (-1)^3 = -1$$

<u>Beh.:</u> (i) Ist n gerade, $n = 2\ell$ mit $\ell \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\sigma_n = (1\ n) \circ (2\ n-1) \circ \dots \circ (\ell\ \ell+1).$$

(ii) Ist n ungerade, $n = 2\ell + 1$ mit $\ell \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$\sigma_n = (1\ n) \circ (2\ n-1) \circ \dots \circ (\ell\ \ell+2)$$

In beiden Fällen ist $\ell = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. (Erinnerung: Durch die untere Gaußklammer „$\lfloor\ \rfloor$" wird jede reelle Zahl zur nächsten ganzen Zahl abgerundet.) Es ist σ_n also ein Produkt von $\ell = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Transpositionen und somit $\det(M_n) = (-1)^\ell = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Für kleine Werte von n ist $\det(M_n)$ also durch folgende Tabelle gegeben.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ℓ	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$\det(M_n)$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1

Beweis der Beh.:

<u>zu (i)</u> n gerade, $n = 2\ell$

Sei $\tau_n = (1\ n) \circ (2\ n-1) \circ \dots \circ (\ell\ \ell+1)$.

z.zg.: $\tau_n(i) = \sigma_n(i)$ für $1 \leq i \leq n$

Nach Def. gilt $\sigma_n(i) = n+1-i$.

1. Fall: $i \leq l$ Es gibt genau eine Transposition im Produkt τ_n, die i nicht auf sich selbst abbildet, nämlich $(i \;\; n+1-i)$.

$\Rightarrow \tau_n(i) = (i \;\; n+1-i)(i) = n+1-i = \sigma_n(i)$.

2. Fall: $i > l$ Dann gilt $n+1-i \leq l$. Es gibt genau eine Transposition im Produkt, die i nicht auf sich selbst abbildet, nämlich $(n+1-i \;\; i)$.

$\Rightarrow \tau_n(i) = (n+1-i \;\; i)(i) = n+1-i = \sigma_n(i)$

Insgesamt gilt also $\sigma_n = \tau_n$.

zu (2) n ungerade, $n = 2l+1$

Sei $\tau_n = (1 \;\; n) \circ (2 \;\; n-1) \circ \dots \circ (l \;\; l+2)$.

Da auch hier alle Transpositionen die Form $(i \;\; n+1-i)$ haben (mit $1 \leq i \leq l$), läuft der Beweis wortwörtlich wie bei (1).

Aufgabe 3 $\quad V$ endlich-dim. K-Vektorraum

$\phi : V \to V$ lineare Abbildung

zu (a) Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ geordnete Basen von V.

z.zg.: $\det \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\phi) = \det \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)$

Transformationsformel $\Rightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\phi) T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$

$\Rightarrow \det(\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)) = \det(T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\phi) T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}) =$

↑ Multiplikationssatz

$\det(T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}) \det(\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\phi)) \det(T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}) =$

$\det(T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}) \det(\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\phi)) \det((T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})^{-1}) =$

$\det(T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}) \det(\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\phi)) \det(T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})^{-1} = \det \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\phi)$

zu (b) z.zg.: Äquivalenz der Aussagen

(i) ϕ ist bijektiv

(ii) Es gibt geordnete Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit $\det \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) = 1$.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" $\det \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) = 1 \Rightarrow \det \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) \neq 0 \Rightarrow$

$\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$ ist invertierbar $\overset{\S 11}{\Longrightarrow}$ ϕ ist bijektiv $\left(\text{und } \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi^{-1}) = \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)^{-1} \right)$

„ $(i) \Rightarrow (ii)$" Ansatz: Wähle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zunächst beliebig. Ändere dann eine der geordneten Basen so ab, dass $\det(\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})$ zu 1 wird.

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}'$ zunächst beliebige geordnete Basen von V.

ϕ ist bijektiv $\overset{\S 11}{\Rightarrow}$ $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}'}(\phi)$ ist invertierbar $\Rightarrow$ $a = \det \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}'}(\phi) \neq 0$

Sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (w_1', \dots, w_n')$ und $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}'}(\phi) = (a_{ij}')$.

Dann gilt nach Def. der Darstellungsmatrix

$$\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}' w_i' \quad \text{für } 1 \leq j \leq n$$

Definiere nun $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ durch

$w_i = w_i'$ für $2 \leq i \leq n$ und $w_1 = a w_1'$.

$$\Rightarrow \phi(v_j) = a_{1j}' w_1' + \sum_{i=2}^{n} a_{ij}' w_i' = a^{-1} a_{1j}' w_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{ij}' w_i$$

$$= a_{1j} w_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{ij} w_i \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}' & \text{falls } i \geq 2 \\ a^{-1} a_{ij}' & \text{falls } i = 1 \end{cases}$$

Dann gilt $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) = (a_{ij})$, wiederum nach Def. der Darstellungsmatrix. Die Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$ entsteht aus $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}'}(\phi)$ durch Multiplikation der ersten Zeile mit a^{-1}.

$$\Rightarrow \det \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) = a^{-1} \det \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}'}(\phi) = a^{-1} a = 1.$$

Für die Richtung „(i) ⇒ (ii)" gibt es noch mindestens zwei weitere Möglichkeiten.

(1) Es wird nicht $\mathcal{B}$, sondern $\mathcal{A}$ abgeändert.
Hier startet man mit zwei beliebigen Basen $\mathcal{A}' = (v_1', \dots, v_n')$ und $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$. Wie oben überprüft man, dass $a = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}'}(\phi)$ ungleich 0 ist und dass $\phi(v_j') = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}' w_i$ für $1 \leq j \leq n$ gilt, falls a_{ij}' die Einträge von $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}'}(\phi)$ sind.
Nun definiert man $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ durch $v_j = v_j'$ für $2 \leq j \leq n$ und $v_1 = a v_1'$.
Es gilt dann $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}' w_i$ für $2 \leq j \leq n$ und

$$\phi(a v_1) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}' w_i \iff a\phi(v_1) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}' w_i \iff \phi(v_1) = \sum_{i=1}^{n} a^{-1} a_{i1}' w_i$$

Dies zeigt, dass die Einträge von $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)$ geg. sind durch
$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}' & \text{für } j \geq 2 \\ a_{ij} & \text{für } j = 1 \end{cases}$, und wie oben folgt daraus $\det \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi) = 1$.

(2) Wähle die Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ so, dass $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)$ die Einheitsmatrix ist.
Wähle $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ beliebig, setze dann $\mathcal{B} = (\phi(v_1), \dots, \phi(v_n))$.
Überprüfe: Da ϕ bijektiv ist, ist auch $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis.
$\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}\, \phi(v_i)$ für $1 \leq j \leq n$ $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)$ hat die Einträge δ_{ij}, stimmt also mit $E^{(n)}$ überein $\Rightarrow \det \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi) = \det E^{(n)} = 1$.