Lineare Algebra

— Lösung Blatt 10 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Jedes der Bilder $\phi(v_1)$, $\phi(v_2)$ und $\phi(v_3)$ legt eine Spalte von $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ fest. Ist $\phi(v_j) = aw_1 + bw_2$, dann hat die j-te Spalte der Darstellungsmatrix die Einträge a, b. Es ist also

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\phi)$ ist nicht definiert. Denn $\mathcal{B}$ ist eine geordnete Basis von W, und $\mathcal{A}$ ist eine geordnete Basis von V. Deshalb dürfen in $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ nur lineare Abbildungen $W \to V$ eingesetzt werden.

zu (b) Sind a, b die Einträge der j-ten Spalte von A, dann bildet $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$ nach Definition den j-ten Basisvektor von $\mathcal{A}$ auf $aw_1 + bw_2$ ab. Deshalb gilt $\phi(v_1) = w_1 + 4w_2$, $\phi(v_2) = 2w_1 + 5w_2$, $\phi(v_3) = 3w_1 + 6w_2$. Weil ϕ linear ist, folgt

$$\phi(v_1 + v_2 + v_3) \quad = \quad \phi(v_1) + \phi(v_2) + \phi(v_3) \quad = \quad (w_1 + 4w_2) + (2w_1 + 5w_2) + (3w_1 + 6w_2) \quad = \quad 6w_1 + 15w_2.$$

zu (c) Die Linearität von $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ bedeutet, dass $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A+B) = \mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) + \mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(B)$ und $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\lambda A) = \lambda \mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$ für alle $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 3,\mathbb{R}}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen immer den Nullvektor des ersten Vektorraums auf den Nullvektor des zweiten Vektorraums abbilden muss. Wählen wir also in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ ein beliebiges Element $\phi \neq 0_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)}$ (zum Beispiel die eindeutig bestimmte lineare Abbildung ϕ, die in Teil (a) beschrieben wird), dann ist die konstante Abbildung

$$\Phi : \mathcal{M}_{2\times 3,\mathbb{R}} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \quad , \quad A \mapsto \phi$$

keine lineare Abbildung, denn die Nullmatrix wird auf $\phi \neq 0_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)}$ abgebildet.

Aufgabe 1

zu (a) Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt $\mu_z(w_1 + w_2) = z(w_1 + w_2) = zw_1 + zw_2 = \mu_z(w_1) + \mu_z(w_2)$ und $\mu_z(cw_1) = z(cw_1) = c(zw_1) = c\mu_z(w_1)$. Auf Grund der Rechenregeln für die komplexe Konjugation gilt ebenso $\iota(w_1 + w_2) = \overline{w_1 + w_2} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 = \iota(w_1) + \iota(w_2)$ und $\iota(cw_1) = \overline{cw_1} = \bar{c} \cdot \bar{w}_1 = c \cdot \bar{w}_1 = c\iota(w_1)$.

zu (b) Um $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mu_z)$ zu bestimmen, muss μ_z auf die Elemente von $\mathcal{B} = (1, i)$ angewendet und das Resultat als Linearkombination von $\mathcal{B}$ dargestellt werden. Es gilt $\mu_z(1) = z = a \cdot 1 + b \cdot i$, die erste Spalte der Matrix ist somit (a, b). Weiter gilt $\mu_z(i) = z \cdot i = (a + ib) \cdot i = (-b) \cdot 1 + a \cdot i$, die zweite Spalte ist also $(-b, a)$. Insgesamt gilt also

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mu_z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Bei der Abbildung ι gehen wir genauso vor. Es gilt $\iota(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot i$, die erste Spalte der Darstellungsmatrix ist also $(1, 0)$. Weiter gilt $\iota(i) = -i = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot i$, somit ist $(0, -1)$ die zweite Spalte. Wir erhalten

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\iota) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

zu (c) In Aufgabe 3 vom Globalübungsblatt 4 haben wir eine Formel für die Inverse einer beliebigen invertierbaren 2×2-Matrix hergeleitet, die wir hier anwenden können. Wir erhalten

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_z)^{-1} \quad = \quad \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

(Alternativ kann natürlich auch der Algorithmus zur Invertierung von Matrizen aus § 4 angewendet werden.) Um ein $w \in \mathbb{C}$ mit $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_z)^{-1} = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_w)$ zu finden, bemerken wir, dass die erste Spalte von $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_z)$ Real- und Imaginärteil von z enthält. Dementsprechend ist die gesuchte Zahl w durch

$$w \quad = \quad \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{(-b)}{a^2 + b^2}$$

gegeben. Multiplikation mit z liefert

$$zw \quad = \quad (a + ib) \cdot \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \quad = \quad \frac{(a + ib)(a - ib)}{a^2 + b^2} \quad = \quad \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \quad = \quad 1.$$

Es gilt also $w = z^{-1}$. Eine Erklärung für dieses Ergebnis liefert Satz (11.13). Denn wie man unmittelbar überprüft, ist $\mu_{z^{-1}}$ die Umkehrabbildung von μ_z. (Für jedes $u \in \mathbb{C}$ ist $(\mu_{z^{-1}} \circ \mu_z)(u) = \mu_{z^{-1}}(zu) = z^{-1}zu = u$ und $(\mu_z \circ \mu_{z^{-1}})(u) = \mu_z(z^{-1}u) = zz^{-1}u = u$.) Der Satz liefert somit $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_z)^{-1} = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_z^{-1}) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_{z^{-1}})$.

Aufgabe 2

zu (a) Der Untervektorraum U ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, da beispielsweise der Vektor $(1, 0, 0)$ nicht in U liegt. Deshalb gilt $\dim U \leq 2$. Andererseits sind die Elemente von $\mathcal{A}$ wegen $1 + (-1) + 0 = 0$ und $1 + 0 + (-1) = 0$ beide in U enthalten, und $\mathcal{A}$ ist linear uanbhängig, denn keiner der beiden Vektoren ist ein skalares Vielfaches des anderen. Als zweielementige, linear unabhängige Menge bilden die beiden Vektoren in $\mathcal{A}$ eine Basis von U.

zu (b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben, wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ ist. Dann gilt

$$\phi(x + y) \quad = \quad \phi((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) \quad = \quad \phi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \quad =$$

$$(x_3 + y_3, x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad = \quad (x_3, x_1, x_2) + (y_3, y_1, y_2) \quad = \quad \phi(x) + \phi(y)$$

und

$$\phi(\lambda x) \quad = \quad \phi(\lambda(x_1, x_2, x_3)) \quad = \quad \phi(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \quad = \quad (\lambda x_3, \lambda x_1, \lambda x_2)$$

$$= \quad \lambda(x_3, x_1, x_2) \quad = \quad \lambda\phi(x).$$

Damit ist die Linearität von ϕ nachgewiesen. Nun beweisen wir die Inklusion $\phi(U) \subseteq U$. Sei $v = (1, -1, 0)$ und $w = (1, 0, -1)$. Es gilt $\phi(v) = (0, 1, -1)$ und $\phi(w) = (-1, 1, 0)$, und wegen $0 + 1 + (-1) = 0$ und $(-1)+1+0 = 0$ sind $\phi(v)$ und $\phi(w)$ wiederum in U enthalten. Wegen $U = \text{lin}\{v, w\}$ hat jedes Element in U die Form $\lambda v + \mu w$ mit geeigneten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Aus der Linearität von ϕ und der Untervektorraum-Eigenschaft von U folgt $\phi(\lambda v + \mu w) = \lambda\phi(v) + \mu\phi(w) \in U$. Damit ist die Inklusion $\phi(U) \subseteq U$ nachgewiesen.

zu (c) Zur Bestimmung von $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi)$ müssen wir ψ auf die Elemente von $\mathcal{A} = (v, w)$ anwenden und das Ergebnis wiederum als Linearkombination von $\mathcal{A}$ darstellen. Es gilt

$$\psi(v) \quad = \quad \phi(v) \quad = \quad (0, 1, -1) \quad = \quad (-1)(1, -1, 0) + 1 \cdot (1, 0, -1) \quad = \quad (-1)v + 1 \cdot w$$

und

$$\psi(w) \quad = \quad \phi(w) \quad = \quad (-1, 1, 0) \quad = \quad (-1)(1, -1, 0) + 0 \cdot (1, 0, -1) \quad = \quad (-1)v + 0 \cdot w.$$

Wir erhalten

$$\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi) \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

zu (a) Zunächst beweisen wir die lineare Unabhängigkeit. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ mit $\lambda_1 v_1^* + \lambda_2 v_2^* + \lambda_3 v_3^* = 0_{V^*}$ vorgegeben. Setzen wir v_1 in diese Gleichung ein, so erhalten wir

$$\lambda_1 v_1^*(v_1) + \lambda_2 v_2^*(v_1) + \lambda_3 v_3^* = 0_{V^*}(v_1) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0.$$

Ebenso erhält man $\lambda_2 = 0$ durch das Einsetzen von v_2 und $\lambda_3 = 0$ durch das Einsetzen von v_3. Damit ist die lineare Unabhängigkeit nachgewiesen.

Sei nun $\varphi \in V^*$ ein beliebiges Element; zu zeigen ist $\varphi \in \operatorname{lin}\ \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$. Wir setzen $\lambda_i = \varphi(v_i)$ für $i = 1, 2, 3$ und definieren anschließend $\tilde{\varphi} = \lambda_1 v_1^* + \lambda_2 v_2^* + \lambda_3 v_3^*$. Es gilt nun

$$\tilde{\varphi}(v_1) \quad = \quad \lambda_1 v_1^*(v_1) + \lambda_2 v_2^*(v_1) + \lambda_3 v_3^*(v_1) \quad = \quad \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 \quad = \quad \lambda_1 \quad = \quad \varphi(v_1) \quad ,$$

und ebenso beweist man $\tilde{\varphi}(v_i) = \varphi(v_i)$ für $i = 2, 3$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist jede Element aus V^* durch die Bilder von v_1, v_2, v_3 eindeutig bestimmt. Daraus folgt $\varphi = \tilde{\varphi} \in \operatorname{lin}\{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$.

zu (b) Die Transformationsmatrix $\mathcal{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ gegeben durch

$$\mathcal{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

und durch Invertierung erhält man

$$\mathcal{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \quad = \quad (\mathcal{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}})^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -9 \end{pmatrix}^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} -4 & 21 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt also $v_1 = -4w_1 - w_2 - w_3$, $v_2 = 21w_1 + 3w_2 + 4w_3$, $v_3 = 5w_1 + w_2 + w_3$. Es folgt

$$w^*(v_1) \quad = \quad -4w^*(w_1) - w^*(w_2) - w^*(w_3) \quad = \quad -4 \cdot 3 - 4 - 5 \quad = \quad -21$$

$$w^*(v_2) \quad = \quad 21w^*(w_1) + 3w^*(w_2) + 4w^*(w_3) \quad = \quad 21 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \quad = \quad 95$$

$$w^*(v_3) \quad = \quad 5w^*(w_1) + w^*(w_2) + w^*(w_3) = 5 \cdot 3 + 4 + 5 \quad = \quad 24.$$

Wie in Teil (a) sieht man, dass w^* mit $(-21)v_1^* + 95v_2^* + 24v_3^*$ übereinstimmt.
Es gilt also $\Phi_{\mathcal{B}^*}(w^*) = (-21, 95, 24)$.