Lösung Globalübungsblatt 10

Aufgabe 1

$V =$ Polynomfkt. vom Grad ≤ 2

$W' =$ Polynomfkt. vom Grad ≤ 3

$W = \operatorname{Lin}\{x, x+x^2, x^3+x^2\} \subseteq W'$

$\mathcal{A} = (2, 1+x, -x^2)$ geordnete Basis von V

$\mathcal{B} = (x, x+x^2, x^3+x^2)$

$\phi : V \to W$ lineare Abb. geg. durch $\phi(p) = \int_0^x p(t)\, dt$

zu (a) gesucht: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)$

Vorgehensweise: • Wende ϕ auf jedes Element p von $\mathcal{A}$ an.

• Stelle $\phi(p)$ als Linearkombination von $\mathcal{B}$ dar.

• Trage die Koeffizienten der Linearkombination als Spalte in $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)$ ein.

$$\phi(2) = \int_0^x 2\, dt = [2t]_0^x = 2x = 2 \cdot x + 0 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot (x^3+x^2)$$

$$\phi(1+x) = \int_0^x (1+t)\, dt = [t + \tfrac{1}{2}t^2]_0^x = \tfrac{1}{2}x^2 + x = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}(x+x^2) + 0 \cdot (x^3+x^2)$$

$$\phi(-x^2) = \int_0^x (-t^2)\, dt = [-\tfrac{1}{3}t^3]_0^x = -\tfrac{1}{3}x^3 = (-\tfrac{1}{3})x + \tfrac{1}{3}(x+x^2) + (-\tfrac{1}{3})(x^3+x^2)$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

zu (b) Berechnung von $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Beh.: Es gilt $\phi^{-1}(p) = p' \quad \forall p \in W \quad (\phi^{-1}: W \to V)$.

Laut Vorlesung gilt $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi^{-1}) = \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)^{-1}$.

außerdem: $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi^{-1})\,\Phi_{\mathcal{B}}(p) = \Phi_{\mathcal{A}}(\phi^{-1}(p))$

$\mathcal{B} = (x, x+x^2, x^3+x^2)$, $\mathcal{A} = (2, 1+x, -x^2)$

(i) Sei $p = x$. $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi^{-1})\,\Phi_{\mathcal{B}}(p) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi^{-1})\, e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{A}}(\phi^{-1}(p))$

$\Rightarrow \phi^{-1}(p) = \frac{1}{2}\cdot 2 + 0\cdot(1+x) + 0(-x^2) = 1 = p'$

(ii) Sei $p = x+x^2$. $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi^{-1})\,\Phi_{\mathcal{B}}(p) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi^{-1})\, e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{A}}(\phi^{-1}(p))$

$\Rightarrow \phi^{-1}(p) = (-\frac{1}{2})\cdot 2 + 2\cdot(1+x) + 0\cdot(-x^2) = 2x+1 = p'$

(iii) Sei $p = x^3+x^2$. $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi^{-1})\,\Phi_{\mathcal{B}}(p) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi^{-1})\, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{A}}(\phi^{-1}(p))$

$\Rightarrow \phi^{-1}(p) = (-1)\cdot 2 + 2\cdot(1+x) + (-3)(-x^2) = 3x^2 + 2x = p'$

Sei nun $p \in W$ beliebig. $\mathcal{B}$ geordnete Basis von $W \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $p = \lambda_1 x + \lambda_2(x+x^2) + \lambda_3(x^3+x^2)$

$\Rightarrow \phi^{-1}(p) = \phi^{-1}(\lambda_1 x + \lambda_2(x+x^2) + \lambda_3(x^3+x^2)) \overset{\phi^{-1} \text{ linear}}{=}$

$= \lambda_1 \phi^{-1}(x) + \lambda_2 \phi^{-1}(x+x^2) + \lambda_3 \phi^{-1}(x^3+x^2) \overset{\text{s.o.}}{=}$

$\lambda_1 x' + \lambda_2 (x+x^2)' + \lambda_3 (x^3+x^2)' =$

$(\lambda_1 x + \lambda_2(x+x^2) + \lambda_3(x^3+x^2))' = p'$

<u>zu (c)</u> Ang., es gibt geordnete Basen $\mathcal{A}'$ von V und $\mathcal{B}'$ von W mit $A = \mathcal{M}^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(\phi)$. Transformationsformel $\Rightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(\phi) = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) T^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}$

Teil (b) $\Rightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$ ist invertierbar

Laut Vorlesung sind $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ und $T^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}$ ebenfalls invertierbar.

$\Rightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(\phi) = A$ ist invertierbar aber: A hat eine Nullspalte und ist somit nicht invertierbar $\lightning$

$\Rightarrow$ Es gibt keine geordnete Basen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$ wie angegeben.

<u>Aufgabe 2</u> $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$

<u>zu (a)</u> z.zg.: $\mathcal{A} = ((1,2,0),(0,3,1))$ und $\mathcal{B} = ((1,2,0),(1,-1,-1))$ sind geordnete Basen von U

$2\cdot 1 - 0 + 3\cdot 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow e_1 = (1,0,0) \notin U \Rightarrow U \subsetneq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim U \leq 2$

Jede 2-elementige linear unabh. Teilmenge von U ist also eine Basis von U.

z.zg. also: $\tilde{\mathcal{A}} = \{(1,2,0),(0,3,1)\}$, $\tilde{\mathcal{B}} = \{(1,2,0),(1,-1,-1)\}$ sind linear unabh. Teilmengen von U.

$2\cdot 1 - 2 + 3\cdot 0 = 0 \Rightarrow (1,2,0) \in U$, $2\cdot 0 - 3 + 3\cdot 1 = 0 \Rightarrow (0,3,1) \in U$

$2\cdot 1 - (-1) + 3\cdot(-1) = 0 \Rightarrow (1,-1,-1) \in U$ also: $\tilde{A}, \tilde{B} \subseteq U$

Weder ist $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ skalares Vielfaches von $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, noch umgekehrt.

$\Rightarrow \hat{A}$ ist linear unabhängig

Weder ist $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ skalares Vielfaches von $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, noch umgekehrt.

$\Rightarrow \hat{B}$ ist linear unabhängig

zu (b) Für alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ gilt $\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\0 & 2 & 0\\4/3 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_3\\2x_2\\4/3\,x_1\end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \phi(x) = \phi_A(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^3$

Lt. Vl. ist ϕ_A für jedes $A \in M_{3,\mathbb{R}}$ eine lineare Abb. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

alternativ: direktes Nachrechnen der Linearität

Seien $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben.

Dann gilt $\phi((x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3)) = \phi(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

$= (3(x_3+y_3), 2(x_2+y_2), \frac{4}{3}(x_1+y_1)) = (3x_3, 2x_2, \frac{4}{3}x_1) + (3y_3, 2y_2, 4/3\,y_1)$

$= \phi(x_1,x_2,x_3) + \phi(y_1,y_2,y_3)$ und $\phi(\lambda(x_1,x_2,x_3)) = (3\lambda x_3, 2\lambda x_2, 4/3\,\lambda x_1) =$

$\lambda(3x_3, 2x_2, 4/3\,x_1) = \lambda \phi(x_3, x_2, x_1)$.

Sei $(x_1, x_2, x_3) \in U$, z.zg.: $(3x_3, 2x_2, \frac{4}{3}x_1) = \phi(x_1, x_2, x_3) \in U$

$(x_1, x_2, x_3) \in U \Rightarrow 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$

$\Rightarrow 2\cdot(3x_3) - (2x_2) + 3\cdot(\frac{4}{3}x_1) = 6x_3 - 2x_2 + 4x_1 =$

$2(2x_1 - x_2 + 3x_3) = 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow (3x_3, -2x_2, \frac{4}{3}x_1) \in U$

zu (c) $\psi = \phi|_U : U \to U$, $\mathcal{A} = ((1,2,0),(0,3,1))$

$$\psi\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\4\\4/3\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 4/3\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi) = \begin{pmatrix}0 & 3\\ 4/3 & 0\end{pmatrix}$$

$$\psi\left(\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$$

Berechnung von $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A} = ((1,2,0),(0,3,1))$, $\mathcal{B} = ((1,2,0),(1,-1,-1))$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = (T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}})^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Transformationsformel $\Rightarrow$ $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\psi) = T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi) T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} =$

$$T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi) E^{(2)} = T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4/3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/3 & 3\\ -4/3 & 0\end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\psi) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi) T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix}0 & 3\\ 4/3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -3\\ 4/3 & 4/3\end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\psi) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\psi) T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix}4/3 & 3\\ -4/3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/3 & -5/3\\ -4/3 & -4/3\end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

zu (a) $\dim V = \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = (\dim \mathbb{R}^2) \cdot (\dim \mathbb{R}^2)$
$= 2 \cdot 2 = 4$

zu (b) Weil $\dim V = 4$ bereits bekannt ist, genügt es z. zg., dass $\tilde{\mathcal{B}} = \{ \phi_{A_1}, \phi_{A_2}, \phi_{A_3}, \phi_{A_4} \}$ und $\tilde{\mathcal{E}} = \{ \phi_{A_1}, \phi_{A_1 - 2A_3}, \phi_{A_1 + A_2 + A_3}, \phi_{A_3 + A_4} \}$ linear unabhängige Teilmengen von V sind.

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \phi_{A_1} + \lambda_2 \phi_{A_2} + \lambda_3 \phi_{A_3} + \lambda_4 \phi_{A_4} \overset{(*)}{=} 0_V$.

z. zg.: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

$(*) \Rightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\lambda_1 \phi_{A_1} + \lambda_2 \phi_{A_2} + \lambda_3 \phi_{A_3} + \lambda_4 \phi_{A_4}) = \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(0_V)$

$\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ linear $\Rightarrow$

$\lambda_1 \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi_{A_1}) + \lambda_2 \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi_{A_2}) + \lambda_3 \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi_{A}) + \lambda_4 \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi_{A_4}) = 0_{\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}}$

$\Rightarrow \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_4 = 0, \ \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$

$\Rightarrow \lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$

Seien nun $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \phi_{A_1} + \lambda_2 \phi_{A_1 - 2A_3} + \lambda_3 \phi_{A_1 + A_2 + A_3} + \lambda_4 \phi_{A_3 + A_4} = 0_V$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \phi_{A_1} + \lambda_2 (\phi_{A_1} - 2\phi_{A_3}) + \lambda_3 (\phi_{A_1} + \phi_{A_2} + \phi_{A_3}) + \lambda_4 (\phi_{A_3} + \phi_{A_4}) = 0_V$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\phi_{A_1} + \lambda_3 \phi_{A_2} + (-2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\phi_{A_3} + \lambda_4 \phi_{A_4} = 0_V$$

$\tilde{\mathfrak{B}}$ linear unabh.

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_3 = -2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = -2\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

zu (c) Die Elemente von $\mathcal{C}$ werden folgendermaßen als Linearkombinationen von $\mathfrak{B}$ dargestellt:

$$\phi_{A_1} = 1 \cdot \phi_{A_1} + 0 \cdot \phi_{A_2} + 0 \cdot \phi_{A_3} + 0 \cdot \phi_{A_4}$$

$$\phi_{A_1 - 2A_3} = 1 \cdot \phi_{A_1} + 0 \cdot \phi_{A_2} + (-2)\phi_{A_3} + 0 \cdot \phi_{A_4}$$

$$\phi_{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} = 1 \cdot \phi_{A_1} + 1 \cdot \phi_{A_2} + 1 \cdot \phi_{A_3} + 1 \cdot \phi_{A_4}$$

$$\phi_{A_3 + A_4} = 1 \cdot \phi_{A_1} + 0 \cdot \phi_{A_2} + 1 \cdot \phi_{A_3} + 1 \cdot \phi_{A_4}$$

Dies liefert die Transformationsmatrix

$$T^{\mathcal{C}}_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Invertierung erhält man $T^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{C}} = (T^{\mathcal{C}}_{\mathfrak{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

<u>zu (d)</u> Es gilt

$$7\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+(-8)\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+(-5)\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+8\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5\\3&8\end{pmatrix}$$

also $7\cdot A_1+(-8)\cdot A_2+(-5)A_3+8\cdot A_4 = A.$

$\Rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(7\cdot A_1+(-8)\cdot A_2+(-5)A_3+8\cdot A_4) = \mathcal{L}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(A)$

$\Rightarrow 7\cdot\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(A_1)+(-8)\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(A_2)+(-5)\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(A_3)+8\cdot\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(A_4)=\mathcal{L}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(A)$

$\Rightarrow 7\cdot\phi_{A_1}+(-8)\phi_{A_2}+(-5)\phi_{A_3}+8\cdot\phi_{A_4}=\phi_A$

$\Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}}(\phi_A) = (7,-8,-5,8)$

und $\Phi_{\mathcal{E}}(\phi_A) = J_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}\,\Phi_{\mathcal{B}}(\phi_A) = \begin{pmatrix}1&-3/2&\frac12&-\frac12\\0&\frac12&-\frac12&\frac12\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\-8\\-5\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25/2\\5/2\\-8\\8\end{pmatrix}$