Checkliste zur Klausurvorbereitung in

Linearer Algebra

Hinweis: Diese Liste ist lediglich als Unterstützung bei der Wiederholung des bisherigen Lehrstoffs vorgesehen. Sie ist *nicht* dazu gedacht, einzelne Themen für die Klausur auszuschließen. Alles, was in der Vorlesung oder den Übungen behandelt wurde, kann prinzipiell in der Klausur vorkommen, auch wenn es in dieser Liste nicht auftaucht. Wenn Sie den Eindruck haben, dass ein wichtiger Punkt fehlt, wäre ich für einen Hinweis (zum Beispiel per Email) dankbar.

(a) Grundbegriffe

- Linearform, homogenes und inhomogenes lineares Gleichungssystem (LGS)
- Lösungsmenge eines LGS
- Äquivalenzrelation, Äquivalenzklasse, Zerlegung einer Menge
- Kongruenzklasse modulo n, Definition des Rings $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- elementare Umformung eines LGS, elementare Zeilenumformung einer Matrix
- Nullmatrix, Einheitsmatrix, Basismatrizen, Einheitsvektoren
- Koeffizientenmatrix eines LGS, erweiterte Koeffizientenmatrix
- Zeilenstufenformen (ZSF) und ihre Kennzahlen, Zeilenrang, normierte ZSF
- Summen und Produkte von Matrizen, transponierte Matrix
- Matrizen in Blockschreibweise
- Elementarmatrizen
- Verknüpfung auf einer Menge, (abelsche) Gruppe, Ring, Körper
- die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$
- K-Vektorraum, Vektoraddition, skalare Multiplikation
- lineare Abbildung bzw. Homomorphismus von K-Vektorräumen
- Mono-/Epi-/Iso-/Endo- und Automorphismen von K-Vektorräumen
- die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ eines K-Vektorraums V
- Untervektorräume
- Summen und direkte Summen von Untervektorräumen
- Bild und Urbild von Untervektorräumen, Definition von $\ker(\phi)$ und $\mathrm{im}(\phi)$
- Linearkombination eines Tupels $(v_1, ..., v_n)$ von Vektoren, Definition der Menge $\mathrm{lin}(S)$ für eine Teilmenge von S eines K-Vektorraums V
- lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit eines Tupels, einer Teilmenge S

- (geordnete) Basen eines K-Vektorraums, Dimension
- Zeilen- und Spaltenraum einer Matrix, Zeilen- und Spaltenrang
- geordnete Basen eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums
- Koordinatenabbildung $\Phi_{\mathscr{A}}$ zu einer geordneten Basis $\mathscr{A}$
- Definition der linearen Abbildung $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(A)$ für eine Matrix A
- Definition der Darstellungsmatrix $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\phi)$ einer linearen Abbildung ϕ
- Matrix des Basiswechsels bzw. Transformationsmatrix $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}$
- multilineare, alternierende, normierte Abbildungen $d : \mathscr{M}_{n,K} \to K$, Determinantenfunktionen
- die symmetrische Gruppe S_n, Transpositionen
- Fehlstand, Signum einer Permutation
- Leibnizformel für Determinanten, Spezialfall $n = 2$, Sarrus-Regel (für $n = 3$)
- Definition der adjunkten Matrix
- Eigenwerte und Eigenvektoren eines Matrix bzw. eines Endomorphismus
- Eigenraum
- Ähnlichkeit und Äquivalenz von Matrizen
- charakteristisches Polynom einer Matrix bzw. eines Endomorphismus
- algebraische und geometrischen Vielfachheit eines Eigenwerts
- Diagonalisierbarkeit einer Matrix, eines Endomorphismus
- Minimalpolynom einer Matrix bzw. eines Endomorphismus
- Begleitmatrix eines normierten Polynoms
- Jordanmatrix, Matrix in Jordanscher Normalform, Jordanblock

(Der Stoff von § 14 geht nur im Umfang von einer Teilaufgabe mit maximal 3 von 80 Punkten in die Klausur ein.)

(b) Wichtige Sätze und Zusammenhänge, Wiederholungs- und Verständnisfragen

- Welche Beziehung besteht zwischen der Lösungsmenge eines inhomogenen LGS und der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS?
- Wie hängen die Äquivalenzrelationen auf einer Menge X mit den Zerlegungen von X zusammen?
- Wie sind die Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definiert? Unter welcher Bedingung ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Körper?
- Wie liest man an einer Matrix in normierter ZSF die Lösungsmenge des zugehörigen LGS ab?
- Wie verifiziert man Rechenregeln für Matrizen, zum Beispiel $E^{(n)}A = A$ für alle $A \in \mathscr{M}_{n,K}$?

- Was haben Elementarmatrizen mit elementaren Zeilen- oder Spaltenumformungen zu tun?
- Inwiefern liefern die Matrizen Beispiele für Gruppen? Welche Gruppen sind in einem Ring bzw. einem Körper zu finden?
- Wie lässt sich rechnerisch feststellen, ob eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ invertierbar ist?
- Sei X eine Menge, K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Wie ist die Vektoraddition und die skalare Multiplikation auf dem K-Vektorraum $\mathrm{Abb}(X, K)$ definiert?
- Inwiefern ist ein Untervektorraum U eines K-Vektorraums selbst ein K-Vektorraum? Wie sind Vektoraddition und skalare Multiplikation auf U definiert?
- Wie sehen Untervektorräume aus, die von ein- oder zweielementigen Mengen erzeugt werden? Welche Rolle spielt es dabei, ob die Mengen linear abhängig oder linear unabhängig sind?
- Durch welche Eigenschaften ist der Untervektorraum $\mathrm{lin}(S)$ charakterisiert (Satz 6.3)? Was muss für eine Menge S gelten, damit $\mathrm{lin}(S) = S$ erfüllt ist? Gibt es eine endliche Teilmenge S von $\mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{lin}(S) = S$?
- Wie hängen die Begriffe „Basis“, „Erzeugendensystem“ und „linear unabhängige Teilmenge“ miteinander zusammen (Satz 7.2)?
- Was besagen Basisauswahlsatz, Basisergänzungsatz und Austauschsatz?
- Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Was kann dann über die linear unabhängigen Teilmengen bzw. die Erzeugendensysteme von V gesagt werden?
- Sei $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine dreielementige, linear unabhängige Teilmenge vom $\mathbb{R}^4$. Kann S eine Basis von $\mathbb{R}^4$ sein? Falls nicht, ist S wenigstens Teilmenge einer Basis?
- Warum ist $\mathbb{C}^3$ ein sechsdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum? Können Sie ein Erzeugendensystem für einen fünfdimensionalen Untervektorraum angeben?
- Welcher unendlich-dimensionale K-Vektorraum ist Ihnen bekannt (für einen beliebigen Körper K)?
- Was besagt der Schnittdimensionssatz?
- Was besagt der Dimensionssatz für lineare Abbildungen? Welche Aussage ergibt sich daraus für den Rang von Matrizen, und warum?
- Was besagt der Rangsatz?
- Wie lässt sich mit dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen begründen, dass keine injektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ und keine surjektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ existiert?
- Was besagt der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Abbildungen? Wie wurde mit diesem Satz die Existenz der linearen Abbildung $\mathscr{L}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(A) : V \to W$ nachgewiesen, für geordnete Basen $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ von V, W und beliebige Matrizen $A \in \mathscr{M}_{m \times n, K}$, wobei $n = \dim V$ und $m = \dim W$ ist?
- Inwiefern sind $\mathscr{L}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}$ und $\mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}$ Vektorraum-Isomorphismen? Welche Beziehung besteht zwischen diesen beiden Isomorphismen?
- Welche Beziehung besteht zwischen $\mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}$ und den Koordinatenabbildungen $\Phi_{\mathscr{A}}$ und $\Phi_{\mathscr{B}}$?
- Welche Beziehung besteht zwischen $\mathscr{T}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}$ und den Koordinatenabbildungen $\Phi_{\mathscr{A}}$ und $\Phi_{\mathscr{B}}$?

- Wie begründet man mit der Leibnizformel, dass die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix lediglich das Produkt der Diagonalelemente ist?
- Wie erkennt man an der Determinante einer Matrix, ob diese invertierbar ist?
- Was besagen der Multiplikationssatz für Matrizen und der Satz über die Determinante von Blockmatrizen?
- Wie hängen adjunkte und inverse Matrix zusammen?
- Was besagt der Laplacesche Entwicklungssatz?
- Begründen Sie mit Hilfe einer geeigneten Determinante, dass es für beliebige reelle Zahlen a, b, c genau ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad ≤ 2 mit $f(1) = a$, $f(2) = b$ und $f(3) = c$ gibt (wobei f auch das Nullpolynom sein kann; vgl. G12A3).
- Welche Beziehung besteht zwischen $\mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$ und den Eigenvektoren von λ, falls λ ein Eigenwert von $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ ist?
- Sei $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{R}}$ eine Matrix mit $\mathrm{Eig}(A, 5) = \mathbb{R}^3$. Geben Sie A an.
- Welche Beziehung besteht zwischen dem charakteristischen Polynom und den Eigenwerten einer Matrix?
- Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix A und einen Eigenwert λ von A an, bei der die algebraische Vielfachheit $\mu_a(A, \lambda)$ größer als die geometrische Vielfachheit $\mu_g(A, \lambda)$ ist. Ist auch das Umgekehrte möglich? Wenn nein, warum nicht?
- Wie hängen die Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen und Matrizen miteinander zusammen?
- Können Sie eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{2,\mathbb{Q}}$ angeben, die über $\mathbb{R}$, aber nicht über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist? (Versuchen Sie eine Matrix A mit $\chi_A = x^2 - 2$ zu finden.)
- Was besagt das Diagonalisierbarkeitskriterium?
- Sei $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ eine Matrix mit der Eigenschaft, dass $\chi_A \in K[x]$ in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Ist A dann diagonalisierbar?
- Warum sind Jordanmatrizen mit Größe ≥ 2 niemals diagonalisierbar?
- Geben Sie jeweils ein Beispiel an für eine Matrix, bei der Minimalpolynom und charakteristisches Polynom gleich bzw. verschieden sind. Unter welcher Bedingung sind bei einer Diagonalmatrix die beiden Polynome gleich?
- Sei J eine Matrix in Jordanscher Normalform. Was bedeutet es für die Jordanblöcke, wenn 3 eine doppelte, aber keine dreifache Nullstelle von μ_J ist?

(c) Beweis- und Rechentechniken

Die Angaben in Klammern verweisen auf die Übungsaufgaben (zum Beispiel G1A3 = Globalübungsblatt 1, Aufgabe 3; P1 = Probeklausuraufgabe 1). Bitte sehen Sie sich auch noch einmal die Rechenbeispiele im Skript an.

- Bestimmung der Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme (T1A1,G1A1,T2A1,G2A1,T3A3,G3A3,T4A1,G4A1,P2)
- Lösungsmengen parameterabhängiger linearer Gleichungssysteme (T4A1,G4A1,P2)
- Beweisaufgaben zum Thema Äquivalenzrelationen (T1A2,G1A2)
- Bestimmung eines LGS zu einer vorgegebenen Lösungsmenge (T2A1,G2A1,G2A2)
- Beweisaufgaben zum Thema endliche Ringe und Körper (T2A3,G2A3)
- Aufgaben zum Thema Rechenregeln für Matrizen (T3A1,T3A2,G3A1,G3A2)
- Berechnung inverser Matrizen (G3A2,T4A3,G4A3)
- Nachweis der Gruppeneigenschaft (T4A2,G4A2)
- Nachweis linearer Abbildungen (T5A1,G5A1,T10A1,T10A2,G10A2,P1)
- Nachweis der Vektorraum-Axiome (T5A2,G5A2,G5A3,T8A3,G8A3)
- Nachweis von Untervektorräumen (T5A3,P1)
- Nachweis der linearen Unabhängigkeit, Darstellung als Linearkombination (T6A1,G6A1,P4)
- Beweisaufgaben zum Thema lineare Unabhängigkeit (T6A2,G6A2,G6A3,P3)
- Beweisaufgaben zum Thema Erzeugendensysteme (T6A3,G6A3)
- Nachweis der Basiseigenschaft, Bestimmung von Basen, Basisergänzung (T7A1,T7A2,T8A1,G8A1,G9A1,T10A3)
- Beweisaufgaben zum Basisbegriff (T7A1,G7A1,G7A2)
- Bestimmung der Anzahl der Basen eines Vektorraums (T7A3,G7A3)
- Beweisaufgaben zum Dimensionsbegriff (T8A3,G8A3)
- Anwendung des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen (T8A1,G8A1,T9A1,P6)
- Beweisaufgaben zum Dimensionssatz (T9A2,G9A2,P6)
- Anwendung des Schnittdimensionssatzes (T8A2,G8A2)
- Berechnung einer Basis des Durchschnitts von Untervektorräumen (T9A3,P5)
- Berechnung von Koordinatenvektoren (G9A3,T10A3,G10A3)
- Berechnung von Darstellungs- und Transformationsmatrizen (T10A1,T10A2,G10A1,G10A2,G10A3)
- Berechnung von Determinanten (T11A1,G11A1,T12A1)
- Rechnen mit Permutationen (T11A2)

- Anwendung der Leibnizformel (T11A3,G11A2)
- Anwendung des Laplace'schen Entwicklungssatzes (T12A2,T12A3,G12A1,G12A2,G12A3)
- Beweisaufgaben zum Thema Determinanten und Darstellungsmatrizen (G11A3,G12A3)
- Beweisaufgaben zum Thema Eigenwerte (T13A1)
- Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren (T13A2,T13A3)