Samstag, 12. Juni 2021

# Lineare Algebra

**— Blatt 9 —**

(Tutoriumsblatt)

**Aufgabe 0** *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Was besagt der Dimensionssatz für lineare Abbildungen? Wie lautet die entsprechende Aussage für Matrizen, und wie hängen die beiden Aussagen zusammen?

(b) Bei dem Verfahren zur Berechnung des Durchschnitts $U \cap W$ zweier Untervektorräume $U, W \leq K^m$ wird eine $(r+s) \times m$-Matrix $A$ gebildet. Wie hängen $\mathrm{rg}(A)$ und $\dim \ker(A)$ mit den Untervektorräumen $U$, $W$, $U+W$ und $U \cap W$ zusammen?

(c) Geben Sie (ohne Nachweis) je ein Erzeugendensystem für den Zeilen- und den Spaltenraum der folgenden Matrix an, ebenso den Zeilen- und Spaltenrang.

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

(d) Gibt es Matrizen, bei denen Zeilen- und Spaltenraum übereinstimmen? Was kann über das Format solcher Matrizen gesagt werden? Oder folgt aus dem Rangsatz vielleicht, dass Zeilen- und Spaltenraum *immer* gleich sind?

(e) Sei $U$ der Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ und $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$. Welche $\mathcal{B}$-Koordinaten haben die Vektoren $(3, -1, -2)$ und $(-1, -2, 3)$? Welches Element von $U$ hat die $\mathcal{B}$-Koordinaten $(7, 7)$?

**Aufgabe 1**

Bestimen Sie $\mathrm{rg}(A)$ und $\dim \ker(A)$ für die folgende Matrix $A \in \mathcal{M}_{4\times 6,\mathbb{R}}$.

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 9 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2**

Sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{M}_{n,K}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

(i) $\ker(A) = SR(A)$

(ii) $A^2 = 0_{\mathcal{M}_{n,K}}$ und $n = 2 \cdot \mathrm{rg}(A)$.

**Aufgabe 3**

Sei $V = \mathbb{F}_3^4$, und seien $U = \mathrm{lin}\{u_1, u_2, u_3\}$ und $W = \mathrm{lin}\{w_1, w_2, w_3\}$ die Untervektorräume mit den Basisvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \; w_1 = \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_3 = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis des Durchschnitts $U \cap W$.

**Dieses Blatt wird vom 13. bis zum 17. Juni im Tutorium bearbeitet.**

# Lineare Algebra

**— Blatt 9 —**

(Globalübungsblatt)

**Aufgabe 1** *(6+4 Punkte)*

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $M_a \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ den Rang $\mathrm{rg}(M_a)$ sowie eine Basis des Spaltenraums von $M_a$.

(b) Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Dimension sowie eine Basis von $\ker(M_a)$.

**Aufgabe 2** *(10 Punkte)*

Sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{M}_{n,K}$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$

(ii) $SR(A) = SR(A^2)$

(iii) $\dim\ker(A) = \dim\ker(A^2)$

(iv) $\ker(A) = \ker(A^2)$

**Aufgabe 3** *(5+5 Punkte)*

(a) Sei $V$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der $2 \times 2$-Matrizen über $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\Phi_{\mathcal{B}}(B + nC)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $V$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = (e_1^*, e_2^*)$, wobei $e_1^*$, $e_2^*$ die eindeutig bestimmten linearen Abbildungen mit $e_1^*(1,0) = 1$, $e_1^*(0,1) = 0$, $e_2^*(1,0) = 0$ und $e_2^*(0,1) = 1$ bezeichnen. Sei $f \in V$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $f(2,3) = 8$ und $f(-1,7) = -2$. Bestimmen Sie $\Phi_{\mathcal{B}}(f)$.

**Abgabe:** Dienstag, 22. Juni 2021, 12:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.