Samstag, 15. Mai 2021

Lineare Algebra

— Blatt 5 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Gruppen und Vektorräumen?

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es Vektorräume mit genau einem Element gibt. Existiert auch ein Vektorraum mit genau zwei Elementen? Gibt es einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit genau einem oder genau zwei Elementen?

(c) Inwiefern kann jeder Matrix $A \in \mathcal{M}_{m\times n,K}$ eine lineare Abbildung $\phi_A : K^n \to K^m$ zugeordnet werden? Welche Abbildungen erhält man, wenn man für A die Einheitsmatrix $E^{(n)}$ oder die Nullmatrix $\mathbf{0}^{(\mathbf{m}\times\mathbf{n})}$ einsetzt?

(d) Warum ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 1$ keine lineare Abbildung, wenn man $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet?

(e) Geben Sie eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}^2$ an, die zwar ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, aber kein Untervektorraum von $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 1

Seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f_i : V \to W$ auf Linearität, Surjektivität und Injektivität. In welchen Fällen liegt ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen vor?

(a) $V = W = \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y) = (3x + 2y, 4x + y)$

(b) $V = W = \mathbb{R}^2$, $f_2(x, y) = (7x + 14y - 1, x + 2y + 5)$

(c) $V = W = \mathbb{R}$, $f_3(x) = x^3$

(d) $V = W = \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$, $f_4(A) = AB$ mit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Auf der Menge $V = \mathbb{R}^2$ sei die Verknüpfung $+$ definiert durch $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ für alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$. Sei die Abbildung $* : \mathbb{R} \times V \to V$ definiert durch $\lambda * (a_1, a_2) = (\lambda a_1, 0)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(a_1, a_2) \in V$. Zeigen Sie, dass $(V, +, *)$ die Bedingungen (i) und (ii)(a),(b),(c) der Definition eines $\mathbb{R}$-Vektorraums erfüllt, die Bedingung (ii)(d) jedoch nicht.

Aufgabe 3

Gegeben seien die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume V und Teilmengen $U \subseteq V$. Entscheiden Sie, in welchen Fällen U ein Untervektorraum von V ist.

(a) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $U = \{f \in V \mid f(x, y) + f(x + 1, y) = 0\}$

(b) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $U = \{f \in V \mid f(x + 1, y) = f(x, y) + 1\}$

(c) $V = \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$, $U = \{A \in V \mid AB = \mathbf{0}^{(\mathbf{2})}\}$, wobei $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist

Dieses Blatt wird vom 17. bis zum 21. Mai im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— Blatt 5 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Für einen Homomorphismus $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^m$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen sei die Abbildung $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ definiert durch $g(v) = f(v) - if(iv)$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie, dass g ein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist.

(b) Sei nun umgekehrt $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass $g(v) = f(v) - if(iv)$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir definieren auf $V \times V$ eine Verknüpfung $\oplus$ und eine Abbildung $* : \mathbb{C} \times (V \times V) \to (V \times V)$ durch

$$(v_1, w_1) \oplus (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \qquad \text{und} \qquad (a + ib) * (v_1, w_1) = (av_1 - bw_1, bv_1 + aw_1)$$

für alle $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times V$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichnet $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$. Zeigen Sie, dass $(V \times V, \oplus, *)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varnothing \neq A \subseteq V$ ein affiner Unterraum von V. Sei $p \in A$, und seien die Abbildungen $\oplus : A \times A \to V$ und $\odot : K \times A \to V$ definiert durch

$$v \oplus w = v + w - p \qquad \text{und} \qquad \lambda \odot v = (1 - \lambda) \cdot p + \lambda \cdot v$$

für alle $v, w \in A$ und $\lambda \in K$, wobei $+$ und $\cdot$ die Vektoraddition und die skalare Multiplikation auf V bezeichnen. Zeigen Sie, dass es sich bei $\oplus$ bzw. $\odot$ um Abbildungen $A \times A \to A$ bzw. $K \times A \to A$ handelt, und dass $(A, \oplus, \odot)$ ein K-Vektorraum mit Nullvektor $0_A = p$ ist.

Abgabe: Mittwoch, 26. Mai 2021, 12:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.