Samstag, 10. Juli 2021

Lineare Algebra

— Blatt 13 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Wie sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren eines Endomorphismus $\phi : V \to V$ definiert (wobei V einen K-Vektorraum bezeichnet)?

(b) Was sind die Eigenwerte des Endomorphismus id_V von V?

(c) Warum ist es sinnvoll, den Nullvektor 0_V bei der Eigenwertdefinition auszuschließen?

(d) Geben Sie einen Endomorphismus des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ mit Eigenwert 0 an.

(e) Wenn ϕ ein injektiver Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$ ist, kann 0 dann Eigenwert von ϕ sein?

Aufgabe 1

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, und seien $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$ zueinander ähnliche Matrizen.

(a) Beweisen Sie die Gleichung $\det(A) = \det(B)$.

(b) Zeigen Sie, dass A und B dieselben Eigenwerte haben.

(c) Zeigen Sie: Ist A invertierbar und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, dann ist $\lambda \neq 0$, und λ^{-1} ist ein Eigenwert von A^{-1}.

Aufgabe 2

Das *charakteristische Polynom* einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ ist gegeben durch $\chi_A = \det(xE^{(n)} - A)$. In der Vorlesung wird gezeigt, dass die Nullstellen von χ_A in K genau die Eigenwerte von A sind. Wir betrachten nun über $K = \mathbb{R}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -8 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie χ_A, und bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte von A. (Zumindest die erste Nullstelle von χ_A muss durch probeweises Einsetzen ermittelt werden.)

(b) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert λ von A eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$.

Aufgabe 3

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A keine reellen Eigenwerte besitzt, und bestimmen Sie die komplexen Eigenwerte.

(b) Bestimmen Sie für jeden komplexen Eigenwert je einen Eigenvektor in $\mathbb{C}^2$.

(c) Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist, und begründen Sie, dass keine solche Matrix in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ existiert.

Dieses Blatt wird vom 12. bis zum 16. Juli im Tutorium bearbeitet.