Samstag, 3. Juli 2021

Lineare Algebra

— Blatt 12 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Durch welche elementaren Zeilenumformungen wird die Determinante einer Matrix verändert, und wie? Wie sieht das Ganze bei elementaren Spaltenumformungen aus?

(b) Wie ist die zu einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ adjunkte Matrix $\tilde{A}$ definiert? Welche Beziehung besteht zwischen der Adjunkten $\tilde{A}$ und der inversen Matrix A^{-1}?

(c) Berechnen Sie die Adjunkte von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(d) Wieviele Rechenoperationen (Additionen und Multiplikationen) benötigt man im ungünstigsten Fall ungefähr, um die Determinante einer 4×4-Matrix mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz und der Sarrus-Regel auszurechnen? Wieviele Rechenoperationen fallen demgegenüber an, wenn man die Determinante statt dessen mit dem Gauß-Algorithmus berechnet?

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix durch Überführung in Zeilenstufenform.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,\mathbb{Q}}$$

Aufgabe 2

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Matrix $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} j & \text{falls } i + j \leq n + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Geben Sie A_4 explizit an.

(b) Beweisen Sie die Gleichung $\det A_n = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n} \cdot n!$ mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes und vollständiger Induktion.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix und $b \in K^n$. Für $1 \leq j \leq n$ sei $x_j = \frac{\det A^{(j)}}{\det A}$, wobei die Matrix $A^{(j)}$ dadurch entsteht, dass man in A die j-te Spalte durch b ersetzt.

(a) Bestimmen Sie $\det A^{(j)}$ durch Entwicklung der Matrix zur j-ten Spalte, für $1 \leq j \leq n$.

(b) Beweisen Sie die Gleichung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \det(A)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{jk}b_k$ für $1 \leq i \leq n$, wobei $\tilde{a}_{jk}$ den Eintrag der zu A adjunkten Matrix $\tilde{A}$ an der Stelle (j,k) bezeichnet.

(c) Folgern Sie aus (b) die Gleichung $Ax = b$.

(d) Verwenden Sie die Lösungsformel $x_j = \frac{\det A^{(j)}}{\det A}$, um die eindeutig bestimmte Lösung des folgenden LGS zu berechnen.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

Dieses Lösungsverfahren ist unter dem Namen *Cramersche Regel* bekannt.

Dieses Blatt wird vom 5. bis zum 9. Juli im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— Blatt 12 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Laplacesschen Entwicklungssatzes die Determinanten folgender Matrizen.

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \alpha & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \alpha & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \alpha & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

In Teil (a) stammen die Matrixeinträge aus dem Körper $\mathbb{F}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \alpha, \alpha + \bar{1}\}$ mit vier Elementen. Dabei ist $\bar{0}$ das Null- und $\bar{1}$ das Einselement des Körpers. Außerdem gilt $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ und $\alpha(\alpha + \bar{1}) = \bar{1}$.

Aufgabe 2 (3+7 Punkte)

Sei A eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) Die Determinante $\det(A)$ ist ganzzahlig.

(b) Genau dann ist A invertierbar, und die inverse Matrix hat Einträge aus $\mathbb{Z}$, wenn $\det A \in \{\pm 1\}$ gilt.

Aufgabe 3 (6+4 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n die Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Hinweis: Überführen Sie die erste Zeile durch geeignete Spaltenumformungen in den Einheitsvektor e_1. Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass elementare Spaltenumformungen sich auf die Determinante genauso auswirken wie die entsprechenden elementaren Zeilenumformungen. Die Determinante der Matrix ist unter dem Namen *Vandermonde-Determinante* bekannt.

(b) Sei $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subseteq K$ eine n-elementige Teilmenge von K, und seien $\beta_1, ..., \beta_n \in K$ beliebig vorgegeben. Beweisen Sie, dass es ein eindeutig bestimmtes Polynom $f \in K[x]$ mit $f \neq 0$ und $\operatorname{grad}(f) \le n - 1$ gibt, so dass $f(\alpha_j) = \beta_j$ für $1 \le j \le n$ erfüllt ist. (Den Vorgang, einen Funktionsgraphen durch eine vorgegebene Punktemenge zu legen, hier die Punkte (α_j, β_j) mit $1 \le j \le n$, bezeichnet man als *Interpolation*.)

Abgabe: Dienstag, 13. Juli 2021, 12:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.