Samstag, 19. Juni 2021

Lineare Algebra

— Blatt 10 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

Seien V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume mit $\dim(V) = 3$, $\dim(W) = 2$, und sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien außerdem $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ und $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ geordnete Basen von V bzw. W.

(a) Nehmen wir an, es gilt $\phi(v_1) = w_1 + w_2$ und $\phi(v_2) = \phi(v_3) = 0_W$. Wie sieht die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$ aus? Könnte man auch die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi)$ bilden?

(b) Sei $\psi = \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie $\psi(v_1)$, $\psi(v_2)$, $\psi(v_3)$ und $\psi(v_1 + v_2 + v_3)$ an.

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} : \mathcal{M}_{2\times 3,\mathbb{R}} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ eine lineare Abbildung ist. Was bedeutet das konkret? Wie könnte eine *nicht-lineare* Abbildung $\mathcal{M}_{2\times 3,\mathbb{R}} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ aussehen?

Aufgabe 1

Wir betrachten $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum, mit der geordneten Basis $\mathcal{B} = (1, i)$.

(a) Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $\mu_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Abbildung $w \mapsto zw$ und $\iota : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w \mapsto \bar{w}$ die komplexe Konjugation. Weisen Sie nach, dass μ_z und ι lineare Abbildungen sind.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_z)$ und $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\iota)$.

(c) Nun setzen wir $z \neq 0$ voraus. Berechnen Sie die inverse Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_z)^{-1}$, und zeigen Sie, dass ein $w \in \mathbb{C}$ mit $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_z)^{-1} = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_w)$ existiert. Mit welchem Satz aus der Vorlesung lässt sich das Ergebnis erklären?

Aufgabe 2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = ((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ eine geordnete Basis von U ist.

(b) Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$. Zeigen Sie, dass ϕ linear ist und $\phi(U) \subseteq U$ gilt.

(c) Sei $\psi = \phi|_U$. Nach Teil (b) ist ψ eine lineare Abbildung $U \to U$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi)$.

Aufgabe 3

Sei V ein dreidimensionaler K-Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine geordnete Basis und V^* der K-Vektorraum der linearen Abbildungen $V \to K$.

(a) Für $1 \leq i \leq 3$ sei $v_i^* \in V^*$ gegeben durch $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq j \leq 3$. Weisen Sie nach, dass $\mathcal{B}^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ eine Basis von V^* ist, und bestimmen Sie die Dimension von V^*.

(b) Sei $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ eine weitere Basis von V gegeben durch $w_1 = v_1 + v_3$, $w_2 = v_1 - v_2 + 5v_3$ und $w_3 = -6v_1 + v_2 - 9v_3$ und $v^* \in V$ ein Element mit $v^*(w_1) = 3$, $v^*(w_2) = 4$ und $v^*(w_3) = 5$. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $\Phi_{\mathcal{B}^*}(v^*)$.

Dieses Blatt wird vom 21. bis zum 25. Juni im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— **Blatt 10** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(3+4+3 Punkte)*

Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2, $\mathcal{A} = (2, 1+x, -x^2)$, W' der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3 und W der Untervektorraum von W' gegeben durch $W = \text{lin}\{x, x+x^2, x^3+x^2\}$. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $\mathcal{A}$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B} = (x, x+x^2, x^3+x^2)$ eine geordnete Basis von W ist.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$ der linearen Abbildung $\phi : V \to W$, $p \mapsto \int_0^x p(t)\, dt$.

(b) Berechnen Sie die inverse Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)^{-1}$ und verwenden sie diese für den Nachweis, dass ϕ^{-1} durch $\phi^{-1}(p) = p'$ für alle $p \in W$ gegeben ist. (Hier ist p' die Ableitung von p.)

(c) Entscheiden Sie, ob es geordnete Basen $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ von V und W gibt, so dass $\mathcal{M}^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(\phi) = A$ gibt, wobei $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{R}}$ die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{bezeichnet.}$$

Aufgabe 2 *(2+3+5 Punkte)*

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = ((1,2,0),(0,3,1))$ und $\mathcal{B} = ((1,2,0),(1,-1,-1))$ geordnete Basen von U sind.

(b) Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\phi(x_1, x_2, x_3) = (3x_3, 2x_2, \frac{4}{3}x_1)$. Weisen Sie nach, dass ϕ linear ist und $\phi(U) \subseteq U$ gilt.

(c) Sei $\psi = \phi|_U$. Nach Teil (b) ist ψ eine lineare Abbildung $U \to U$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi)$ $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\psi)$ $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\psi)$ und $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\psi)$.

Aufgabe 3 *(1+3+3+3 Punkte)*

Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Dimension von V an.

(b) Für jedes $A \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ sei $\phi_A \in V$ gegeben durch $\phi_A(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Weisen Sie nach, dass durch $\mathcal{B} = (\phi_{A_1}, \phi_{A_2}, \phi_{A_3}, \phi_{A_4})$ mit
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
und durch $\mathcal{C} = (\phi_{A_1}, \phi_{A_1 - 2A_3}, \phi_{A_1+A_2+A_3}, \phi_{A_3+A_4})$ geordnete Basen von V gegeben sind.

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $\mathcal{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$.

(d) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren $\Phi_{\mathcal{B}}(\phi_A)$ und $\Phi_{\mathcal{C}}(\phi_A)$ von $\phi_A \in V$ mit der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Dienstag, 29. Juni 2021, 12:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.