Samstag, 17. April 2021

# Lineare Algebra

**— Blatt 1 —**

(Tutoriumsblatt)

**Aufgabe 0** *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Ist $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| \leq 1\}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$? Falls nicht, welche Bedingungen an eine Äquivalenzrelation sind für $R$ erfüllt?

(b) Geben Sie die Lösungsmenge des LGS bestehend aus der einzelnen Gleichung $x + y = 0$ an, wobei wir das System über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen betrachten, und ebenso die Lösungsmenge der Gleichung $0 \cdot x + 5y = 1$.

(c) Warum ist es bei der Bestimmung der Lösungsmenge eines LGS *kein* zulässiger Schritt, eine der Gleichungen mit Null zu multiplizieren?

(d) Ist es bei der Lösung eines LGS zulässig, zwei Variablen miteinander zu vertauschen?

**Aufgabe 1**

Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{C}^2$ des folgenden linearen Gleichungssystems, zunächst mit dem Einsetzungs- und dann noch einmal mit dem Eliminationsverfahren.

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & = & 13 - 3i \\ ix_1 & - & x_2 & = & 4 - 2i \end{array}$$

**Aufgabe 2**

Sei $X$ eine beliebige Menge.

(a) Zeigen Sie, dass $R_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ ist.

(b) Sei $R$ eine Relation auf $X$, die symmetrisch und anti-symmetrisch ist. Zeigen Sie, dass dann $R \subseteq R_X$ gilt, und dass $R$ transitiv ist.

(c) Beweisen Sie, dass jede anti-symmetrische Äquivalenzrelation auf $X$ mit $R_X$ übereinstimmt.

**Aufgabe 3**

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem über Körper $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Umformungsschritte *keine* Äquivalenzumformungen sind, indem Sie anhand konkreter Beispiele nachweisen, dass sich die Lösungsmenge eines LGS durch diese Schritte ändern kann.

(i) Ersetzung der 2. Gleichung durch die Summe des $\lambda$-fachen der 1. und des $\mu$-fachen der 2. Gleichung, wobei $\lambda, \mu$ beliebige reelle Zahlen bezeichnen

(ii) Addition des $\lambda$-fachen der 1. Gleichung zur 2. Gleichung und *gleichzeitige* Addition des $\mu$-fachen der 2. Gleichung zur ersten Gleichung (wieder mit beliebigen $\lambda, \mu$ aus $\mathbb{R}$)

Für welche Werte von $\lambda, \mu$ ist die Umformung (i) doch zulässig, d.h. bei welchen Paaren ändert sich die Lösungsmenge mit Sicherheit nicht?

**Dieses Blatt wird vom 19. bis zum 23. April im Tutorium bearbeitet.**

# Lineare Algebra

**— Blatt 1 —**

(Globalübungsblatt)

**Aufgabe 1** *(10 Punkte)*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden LGS über den reellen Zahlen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -3 \\ & & 7x_2 & - & 2x_3 & = & -23 \end{array}$$

**Aufgabe 2** *(10 Punkte)*

Sei $R$ ein Ring. Ein *Ideal* in $R$ ist eine Teilmenge $I$ mit $0_R \in I$ und der Eigenschaft, dass für alle $\alpha, \beta \in I$ und alle $r \in R$ auch $\alpha + \beta$ und $r\alpha$ in $I$ enthalten sind.

(a) Sei $R = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$, der Ring der *Gaußschen Zahlen*. Zeigen Sie, dass $I = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\ ,\ a \equiv_2 b\}$ ein Ideal in $R$ ist.

(b) Ein Ideal $I$ in $R$ wird *maximal* genannt, wenn kein Ideal $J$ mit $I \subsetneq J \subsetneq R$ existiert. Zeigen Sie, dass das Ideal aus Aufgabenteil (a) ein maximales Ideal ist.

(c) Sei $R$ ein beliebiger Ring und $I$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $S = \{(a, b) \mid a - b \in I\}$ eine Äquivalenzrelation auf $R$ ist.

**Aufgabe 3** *(10 Punkte)*

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

mit $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Besitzt das zugehörige homogene LGS eine Lösung $c \neq (0, 0)$, dann gilt $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$.

(b) Ist das angegebene LGS inhomogen und seine Lösungsmenge leer, dann besitzt das zugehörige homogene LGS unendlich viele Lösungen.

**Abgabe:** Dienstag, 27. April 2021, 12:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.