Dr. Ralf Gerkmann
Sahand Tokasi

Wintersemester 2020/21
28.12.2020

Analysis einer Variablen

(Lehramt Gymnasium)

Probeklausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________ Übungsgruppe: ____________________

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Wirtschaftspädagogik

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							

Hinweise:

(a) Die Klausur ist für eine Bearbeitungszeit von 90 Minuten vorgesehen und besteht aus 6 Aufgaben. Die reguläre Klausur Anfang März dauert 120 Minuten und besteht aus 8 Aufgaben. Pro Aufgabe ist also eine Bearbeitungszeit von 15 Minuten vorgesehen.

(b) Bitte beachten Sie, dass für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen sind!

(c) Sollte es nicht möglich sein, die Lösung zu einer Aufgabe auf dem dazugehörigen Blatt unterzubringen, können Sie in der Klausur zusätzliche Blätter anfordern. Wichtig ist, dass auf jedem Blatt **nur jeweils eine Aufgabe** bearbeitet wird. Schreiben Sie bitte auf keinen Fall Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt!

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Vor- und Nachnamen.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Ungleichung

$$3^n \quad > \quad 2^n + 3n^2 + 10 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 4.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (2+8 Punkte)

(a) Sei $M_{10} = \{1, 2, ..., 10\}$ und $f : M_{10} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$ für alle $x \in M_{10}$. Geben Sie die Urbildmenge $f^{-1}(]-2, 5[)$ an. Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine surjektive Abbildung und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = g(x) + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass auch h surjektiv ist.

Name: ____________________

Aufgabe 3. (1+6+3 Punkte)

(a) Wie ist der Absolutbetrag $|\cdot|$ auf dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen definiert?

(b) Sei $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < |x-2| < 3\}$ und $D =]-1, 0[\cup]4, 5[$.
Zeigen Sie, dass $C = D$ gilt, indem Sie einzeln $C \subseteq D$ und $D \subseteq C$ nachweisen.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie durch Angabe eines konkreten Gegenbeispiels:
Sind A, B beliebige Mengen, dann gilt

$$\mathcal{P}(A \setminus B) \quad = \quad \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B).$$

(Dabei bezeichnet $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A.)

Name: ____

Aufgabe 4. (2+8 Punkte)

Sei $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ ein angeordneter Körper.

(a) Was bedeutet es, dass $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ vollständig ist? Bitte geben Sie die Definition oder eine äquivalente Charakterisierung an.

(b) Sei nun vorausgesetzt, dass $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ vollständig ist. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\forall x \in \mathbb{K}_+ : \ \big(x > 0_{\mathbb{K}} \ \Leftrightarrow \ \exists n \in \mathbb{N} : \ n_{\mathbb{K}}^{-2} < x\big)$$

Name: ____

Aufgabe 5. (3+7 Punkte)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ definiert durch $A = \left[0, \sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, dass A kein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Bestimmen Sie Minimum, Maximum, Supremum und Infimum der Menge A, sofern diese existieren (jeweils mit Nachweis). Dass $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegt, darf dabei ohne Beweis verwendet werden.

Name: ____________________

Aufgabe 6. (2+8 Punkte)

(a) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ an, und eine weitere Folge, die keine Cauchyfolge ist. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n > 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ gilt.