Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 9 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Bei der ersten Variante beweist man die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, indem man eine Konstante $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$ findet, so dass $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \le \theta$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Bei der zweiten Variante zeigt man, dass der Grenzwert $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ existiert und kleiner als 1 ist. Bei der ersten Variante ist zu beachten, dass es nicht genügt, $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu überprüfen. Diese Bedingung wird auch von der harmonischen Reihe erfüllt, die bekanntlich divergent ist.

zu (b) Mit dem Leibniz-Kriterium lässt sich nur Konvergenz zeigen, aber keine Divergenz. Quotienten- und Wurzelkriterium sind ebenfalls nicht geeignet, denn für $a_n = \frac{1}{n}$ gilt $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$ und $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ (Letzteres kann am besten mit der Logarithmusfunktion gezeigt werden, die aber noch nicht eingeführt wurde.) Beim Minorantenkriterium gibt es keine naheliegende Reihe, die zum Vergleich herangezogen werden. Damit bleibt nur das Verdichtungskriterium übrig. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $2^k a_{a^k} = 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = 1$, und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ ist divergent.

zu (c) Jedes Element der angebenen Menge A ist ein isolierter Punkt. (Ist nämlich $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ vorgegeben und $\varepsilon = \min\{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\}$, dann enthält das Intervall $\left]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right[$ außer $\frac{1}{n}$ keine Element aus A. Für $1 \in A$ hat das Intervall $\left]1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right[= \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$ dieselbe Eigenschaft.) Der einzige Häufungs- und zugleich Berührpunkt von A ist 0. (Denn es gilt $0 \notin A$, und $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in A, die gegen 0 konvergiert. Der Nachweis, dass es keine weiteren Häufungspunkte gibt, ist etwas aufwändiger.)

zu (d) Die Stetigkeit bedeutet, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n x_n = a$ jeweils $\lim_n f(x_n) = f(a)$ gilt. Für die Gleichung $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ fordert man, dass jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n x_n = b$ jeweils $\lim_n f(x_n) = c$ erfüllt.

zu (e) Die Folge $(-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ hat diese Eigenschaft.

Aufgabe 1

zu (a) Die Reihe divergiert auf Grund des Minorantenkriteriums. Es gilt

$$1 \le n \Leftrightarrow n \le n^2 \Leftrightarrow \sqrt{n} \le \sqrt{n^2} = n \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen bereits, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. Somit ist nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent.

zu (b) Die Reihe konvergiert auf Grund des Wurzelkriteriums. Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(n+1)^n}{n^n 2^n}\right|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ gilt dann $0 < \theta < 1$, und es ist $\sqrt[n]{\left|\frac{(n+1)^n}{n^n 2^n}\right|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \le \theta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 3$. Damit konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium sogar absolut.

zu (c) Sei $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+7}-2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle n ist a_n positiv, und es gilt die Äquivalenz

$$|a_n| \le \frac{2}{n\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n\sqrt{n+7}-2} \le \frac{2}{n\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad n\sqrt{n+7}-2 \ge \tfrac{1}{2}n\sqrt{n}.$$

Wegen $n\sqrt{n+7} \ge n\sqrt{n}$ ist die letzte Ungleichung erfüllt, falls

$$n\sqrt{n}-2 \ge \tfrac{1}{2}n\sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}n\sqrt{n} \ge 2 \quad \Leftrightarrow \quad n\sqrt{n} \ge 4 \quad \text{gilt,}$$

und Letzteres ist auf jeden Fall für alle $n \ge 4$ erfüllt. Es gilt also $|a_n| \le \frac{2}{n\sqrt{n}}$ für alle $n \ge 4$. Laut Vorlesung ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ konvergent, damit auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}} \quad = \quad 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}.$$

Es handelt sich also bei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}}$ um eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, und nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Aufgabe 2

zu (a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x_n = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen 1. Wäre f im Punkt 1 stetig, dann müsste $\lim_n f(x_n) = f(1) = 1$ gelten. Tatsächlich aber gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n - 1} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{n+1} - 1} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1} - 1}$$
$$= \quad \lim_{n\to\infty} -(n+1) \quad = \quad -\infty.$$

zu (b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x_n = \frac{1}{2}$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ für alle $n \ge N$. Für diese n gilt $x_n - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_n < 1$ und somit $f(x_n) = \frac{1}{x_n - 1}$. Weil das Weglassen endlich vieler Folgenglieder das Konvergenzverhalten nicht ändert, erhalten wir auf Grund der Grenzwertsätze

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n - 1} \quad = \quad \frac{1}{\lim_n x_n - 1} \quad = \quad \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} \quad = \quad f(\tfrac{1}{2}).$$

zu (c) Sei $x > 1$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen x konvergiert. Zu zeigen ist $\lim_n f(x_n) = f(x)$. Wegen $\lim_n x_n = x$ gibt es für $\varepsilon = x - 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Insbesondere gilt für diese $n \in \mathbb{N}$ dann $x - x_n < x - 1 \Leftrightarrow x_n > 1$ und somit $f(x_n) = \frac{1}{x_n}$. Durch die Grenzwertsätze erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} \quad = \quad \frac{1}{\lim_n x_n} \quad = \quad \frac{1}{x} \quad = \quad f(x).$$

Aufgabe 3

zu (a) Wir überprüfen, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. Zunächst betrachten wir den Fall $x < 0$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x_n = x$. Dann gibt es zu $\varepsilon = -x$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Insbesondere gilt $x_n - x < \varepsilon = -x \Leftrightarrow x_n < 0$ und somit $f(x_n) = (f|_A)(x_n)$ für diese n. Weil die endlich vielen Folgenglieder $f(x_n)$ mit $n < N$ keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten haben und $f|_A$ nach Voraussetzung in x stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (f|_A)(x_n) \quad = \quad (f|_A)(x) \quad = \quad f(x).$$

Im Fall $x > 0$ läuft der Beweis weitgehend analog. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x_n = x$. Dann gibt es zu $\varepsilon = x$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt $x - x_n < \varepsilon = x \Leftrightarrow -x_n < 0 \Leftrightarrow x_n > 0$ und somit $f(x_n) = (f|_B)(x_n)$ für diese n. Auf Grund der Stetigkeit von $f|_B$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (f|_B)(x_n) \quad = \quad (f|_B)(x) \quad = \quad f(x).$$

Zum Schluss beweisen wir die Stetigkeit im Punkt 0. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = 0$; zu zeigen ist $\lim_n f(x_n) = f(0)$. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Um die Stetigkeit von $f|_A$ und $f|_B$ nutzen zu können, definieren wir zwei neue Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $y_n = \min\{x_n, 0\}$ und $z_n = \max\{x_n, 0\}$. Es gilt dann $y_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_n f(y_n) = f(0)$ auf Grund der Stetigkeit von $f|_A$ im Nullpunkt. Es gibt also ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|f(y_n) - f(0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$. Ebenso gilt $z_n \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_n f(z_n) = f(0)$ auf Grund der Stetigkeit von $f|_B$ im Nullpunkt. Es existiert also ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|f(z_n) - f(0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_2$.

Sei nun $N = \max\{N_1, N_2\}$ und $n \geq N$. Nach Definition der Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $x_n = y_n$ oder $x_n = z_n$. Im ersten Fall ist $|f(x_n) - f(0)| = |f(y_n) - f(0)| < \varepsilon$ wegen $n \geq N_1$, im zweiten Fall gilt $|f(x_n) - f(0)| = |f(z_n) - f(0)| < \varepsilon$ wegen $n \geq N_2$. (Mit dem ε-δ-Kriterium, dass wir am Mittwoch durchnehmen, lässt sich der Stetigkeitsbeweis im Nullpunkt etwas kürzer formulieren.)

zu (b) Sei $A = \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Die Funktion f definieren wir durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Zu zeigen ist, dass die Funktionen $f|_A$ und $f|_B$ stetig, f selbst aber in keinem Punkt stetig ist. Zum Nachweis der Stetigkeit von $f|_A$ sei $x \in A$ vorgegeben und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im Definitionsbereich A von $f|_A$, die gegen x konvergiert. Dann gilt $f(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} (f|_A)(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} 1 \quad = \quad 1 \quad = \quad f(x).$$

Also ist $f|_A$ im Punkt x stetig. Um die Stetigkeit von $f|_B$ nachzuweisen, sei $x \in B$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in B (!) die gegen x konvergiert. Dann gilt $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} (f|_B)(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} 0 \quad = \quad 0 \quad = \quad f(x).$$

Damit ist $f|_B$ im Punkt x stetig.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Wir müssen zeigen, dass f in x unstetig ist. Betrachten wir zunächst den Fall $x \in B$. Weil die rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ dicht liegen, finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{Q}$ mit $|x - x_n| < \frac{1}{n}$. Es gilt dann $\lim_n x_n = x$. Ist nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$, und es folgt $|x_n - x| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Andererseits gilt $f(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} 1 \quad = \quad 1 \quad \neq \quad 0 \quad = \quad f(x).$$

Also ist f in x unstetig.

Betrachten wir nun den Fall $x \in A$. Nicht nur die rationalen, sondern auch die irrationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$. Deshalb gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein irrationales x_n mit $|x - x_n| < \frac{1}{n}$. Wie im vorherigen Absatz zeigt man man $\lim_n x_n = x$. Wegen $x_n \notin \mathbb{Q}$ gilt andererseits $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} 0 \quad = \quad 0 \quad \neq \quad 1 \quad = \quad f(x).$$

Also ist f auch im Fall $x \in A$ in x unstetig.