Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 9 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a)(i) Um das Leibniz-Kriterium anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = \frac{n}{(n-1)^2+1}$ monoton fallend ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz

$$a_{n+1} \le a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n+1}{n^2+1} \le \frac{n}{(n-1)^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)((n-1)^2+1) \le n(n^2+1) \quad \Leftrightarrow$$

$$(n+1)(n^2-2n+2) \le n(n^2+1) \quad \Leftrightarrow \quad n^3-2n^2+2n+n^2-2n+2 \le n^3+n \quad \Leftrightarrow \quad -n^2+2 \le n$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $-n+2 \le n$ und somit auch $-n^2+2 \le n$. Auf Grund der Äquivalenz ist $a_{n+1} \le a_n$ also für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Außerdem gilt auf Grund der Grenzwertsätze

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \quad = \quad \frac{0+0}{1+0} \quad = \quad 0.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums erfüllt, und es folgt die Konvergenz der Reihe.

Die absolute Konvergenz der Reihe ist gleichbedeutend mit der Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)^2+1} \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-2n+2}.$$

Wir weisen die Divergenz nach, indem wir die Reihe mit einem Vielfachen der harmonischen Reihe vergleichen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz

$$\frac{n}{n^2-2n+2} \ge \frac{1}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad n(2n) \ge n^2-2n+2 \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 \ge n^2-2n+2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \ge -2n+2.$$

Diese Ungleichung ist offenbar für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, also gilt auch $\frac{n}{n^2-2n+2} \ge \frac{1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist laut Vorlesung divergent, somit auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, da die Konstante $\frac{1}{2}$ am Konvergenzverhalten nichts ändert. Also folgt die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)^2+1}$ aus dem Minorantenkriterium. Die in der Aufgabenstellung angegebene Reihe ist also konvergent, aber nicht absolut konvergent.

zu (a)(ii) Hier wenden wir das Quotientenkriterium an. Setzen wir $a_n = \frac{3^n}{n^2+3n+2}$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad = \quad \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2+3(n+1)+2} \cdot \frac{n^2+3n+2}{3^n} \quad = \quad 3 \cdot \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{(1+\frac{1}{n})+3(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})+\frac{2}{n^2}}.$$

Auf Grund der Grenzwertsätze gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad = \quad 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{(1+\frac{1}{n})+3(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})+\frac{2}{n^2}} \quad = \quad 3 \cdot \frac{1+0+0}{(1+0)+3(0+0)+0} \quad = \quad 3 \cdot 1 \quad = \quad 3.$$

Wegen $3 > 1$ folgt die Divergenz der Reihe aus dem Quotientenkriterium in der Fassung (10.17).

zu (a)(iii) Zur Anwendung des Minorantenkriteriums setzen wir $a_n = \frac{15n+7}{n^2+6n+8}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt jeweils die Äquivalenz

$$\frac{15n+7}{n^2+6n+8} \geq \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad 15n^2+7n \geq n^2+6n+8 \quad \Leftrightarrow \quad 14n^2+n \geq 8$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen $14n^2+n \geq 14 \cdot 1^2 + 1 = 15 \geq 8$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist auch $a_n \geq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Laut Vorlesung divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, also folgt die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ aus dem Minorantenkriterium.

zu (a)(iv) Hier wenden wir erneut das Quotientenkriterium an. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_n = \frac{n!}{n^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad = \quad \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \quad = \quad (n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \quad = \quad \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad = \quad \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_n (1+\frac{1}{n})^n = e$ gilt, wobei e die Eulersche Zahl bezeichnet. Wegen $e > 1$ gilt $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{e} < 1$. Also folgt die absolute Konvergenz der Reihe aus dem Quotientenkriterium.

zu (b) Auch hier wenden wir das Quotientenkriterium an. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $a_n = \frac{1}{n}(x^2-1)^n$. Dann gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad = \quad \frac{(x^2-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x^2-1)^n} \quad = \quad \frac{n}{n+1}(x^2-1).$$

Wegen $\lim_n \frac{n}{n+1} = 1$ gilt $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = x^2 - 1$. Ist $x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\ \cup \ \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$, also $|x| > \sqrt{2}$, dann ist $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = x^2 - 1 > 2 - 1 = 1$. In diesem Fall divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium. Ist $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ und $x \neq 0$, dann gilt $0 < |x| < \sqrt{2}$, also $0 < x^2 < 2$ und somit $-1 < x^2 - 1 < 1$. Somit ist $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, und die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium.

Nun untersuchen wir noch die Konvergenz der Reihe für die Punkte $x = 0$ und $x \in \{\pm\sqrt{2}\}$. Im Fall $x = 0$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. Laut Vorlesung ist diese Reihe konvergent (nach dem Leibnizkriterium). Ist $x \in \{\pm\sqrt{2}\}$, dann folgt $(x^2-1)^n = 1^n = 1$, also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dies ist die harmonische Reihe, die laut Vorlesung divergiert.

Zusammenfassend ist die Reihe also für $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ konvergent, und für alle übrigen $x \in \mathbb{R}$ divergent.

Aufgabe 2

Wir zeigen, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben.

1. Fall: $a < 0$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = a$. Zu zeigen ist $\lim_n f(x_n) = f(a)$. Sei $\varepsilon = -a \in \mathbb{R}^+$. Wegen $\lim_n x_n = a$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Daraus folgt $x_n < a + \varepsilon = 0$ und auf Grund der Definition somit $f(x_n) = -x_n^2$ für alle $n \geq N$. Weil sich die Änderung endlich vieler Folgenglieder auf das Konvergenzverhalten einer Folge nicht auswirken, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} -x_n^2 \quad = \quad (-1)\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 \quad = \quad -a^2 \quad = \quad f(a).$$

Hinweis:
Nicht zulässig ist in dieser Situation ein Argument der Form „Die Funktion f ist für $a < 0$ stetig, weil sie dort mit der stetigen Funktion $x \mapsto -x^2$ übereinstimmmt.“ Aufgabe 2 (b) vom Tutoriumsblatt zeigt, dass ein solche Herangehensweise jedenfalls im Allgemeinen nicht funktioniert.

2. Fall: $a > 0$
Hier läuft der Beweis nach demselben Schema. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = a$. Zu zeigen ist $\lim_n f(x_n) = f(a)$. Sei $\varepsilon = a \in \mathbb{R}^+$. Wegen $\lim_n x_n = a$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Daraus folgt $x_n > a - \varepsilon = 0$ und auf Grund der Definition somit $f(x_n) = x_n^3$ für alle $n \geq N$. Weil die Änderung endlich vieler Folgenglieder keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten einer Folge hat, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} x_n^3 \quad = \quad \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^3 \quad = \quad a^3 \quad = \quad f(a).$$

3. Fall: $a = 0$
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = 0$. Zu zeigen ist $\lim_n f(x_n) = f(0)$, also $\lim_n f(x_n) = 0$. Leider können wir hier nicht wie in den beiden vorherigen Fällen argumentieren, weil wir damit rechnen müssen, dass unsere Folge aus positiven *und* negativen Zahlen besteht und somit für einige n die Gleichung $f(x_n) = -x_n^2$ und für andere $f(x_n) = x_n^3$ gilt. Statt desssen beweisen wir $\lim_n f(x_n) = 0$ direkt anhand der Definition der Konvergenz. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_n) - 0| = |f(x_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ existiert. Dabei dürfen wir o. B. d. A. $\varepsilon < 1$ annehmen. (denn: Ist $\varepsilon < 1$ nicht erfüllt, dann können wir (beispielsweise) $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \frac{1}{2}\}$ definieren und zunächst zeigen, dass ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x)| < \varepsilon_1$ für alle $n \geq N$ existiert. Es gilt dann erst recht $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.)

Wegen $\lim_n x_n = 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wir zeigen, dass dann auch $|f(x_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ vorgegeben. Ist $x_n < 0$, dann gilt $|f(x_n)| = |-x_n^2| = |x_n|^2$. Wegen $|x_n| < \varepsilon < 1$ gilt $|x_n|^2 \leq |x_n|$. Also gilt $|f(x_n)| = |x_n|^2 < |x_n| < \varepsilon$. Ist $x_n \geq 0$, dann folgt ebenso $|f(x_n)| = |x_n^3| = |x_n|^3 \leq |x_n| < \varepsilon$. Also ist $|f(x_n)| < \varepsilon$ tatsächlich für alle $n \geq N$ erfüllt.

Anmerkung:

Es gibt mindestens zwei weitere Möglichkeiten, den 3. Fall zu behandeln. Die erste Variante hat den Vorzug, auch in allgemeineren Situationen verwendbar zu sein. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x_n = 0$. Zu zeigen ist wieder $\lim_n f(x_n) = f(0)$, also $\lim_n f(x_n) = 0$. Aus $\lim_n x_n = 0$ folgt mit den Grenzwertsätzen sowohl

$$\lim_n -x_n^2 = -0^2 = 0 \qquad \text{als auch} \qquad \lim_n x_n^3 = 0^3 = 0.$$

Es existieren also $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $|-x_n^2| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$ und $|x_n^3| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_2$ erfüllt ist. Sei nun $N = \max\{N_1, N_2\}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Nach Definition der Funktion f gilt $f(x_n) = -x_n^2$ oder $f(x_n) = x_n^3$. Im ersten Fall folgt $|f(x_n)| = |-x_n^2| < \varepsilon$ wegen $n \geq N_1$, im zweiten $|f(x_n)| = |x_n^3| < \varepsilon$ wegen $n \geq N_2$. Insgesamt gilt $|f(x_n)| < \varepsilon$ also für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Man kann im 3. Fall auch ganz auf Folgen verzichten und statt dessen mit dem ε-δ-Kriterium arbeiten. Um zu zeigen, dass f in 0 stetig ist, müssen wir nachweisen, dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Implikation $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ gültig ist. Wegen $f(0) = 0$ ist dies äquivalent zu $|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei also $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wie oben dürfen wir o.B.d.A. $\varepsilon < 1$ annehmen. Sei $\delta = \varepsilon$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$. Wegen $|x| < \varepsilon < 1$ gilt $|x|^2 \leq |x|$ und $|x|^3 \leq x$. Zu zeigen ist nun $|f(x)| < \varepsilon$. Wieder unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $x < 0$, dann gilt $f(x) = -x^2$ und somit $|f(x)| = |-x^2| = |x|^2 \leq |x| < \varepsilon$. Ist $x \geq 0$, dann gilt $f(x) = x^3$ und somit ebenfalls $|f(x)| = |x^3| = |x|^3 \leq |x| < \varepsilon$. Also ist $|f(x)| < \varepsilon$ in jedem Fall erfüllt.

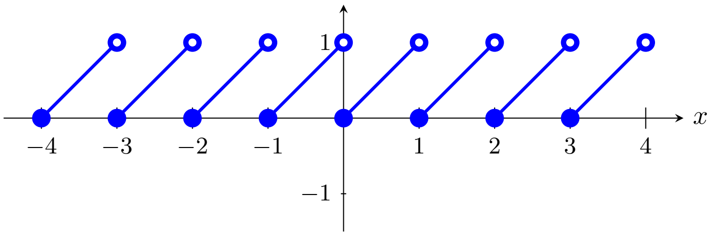
Betrachten wir nun die Funktion g. Zunächst zeigen wir, dass g im Punkt 0 unstetig ist. Wäre sie stetig, dann müsste für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n x_n = 0$ jeweils $\lim_n f(x_n) = f(0)$ gelten, insbesondere müsste $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Betrachten wir nun die Folge gegeben durch $x_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim_n x_n = 0$ erfüllt. Wegen $x_n > 0$ gilt $f(x_n) = \frac{1}{x_n} = (\frac{1}{n})^{-1} = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist aber unbeschränkt und konvergiert somit nicht.

Sei nun $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir zeigen, dass g in a stetig ist. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = a$. Setzen wir $\varepsilon = |a| \in \mathbb{R}^+$, so existiert auf Grund der Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Im Fall $a < 0$ ist $x_n < a + \varepsilon = a + (-a) = 0$, im Fall $a > 0$ gilt $x_n > a - \varepsilon = a - a = 0$, in jedem Fall also $x_n \neq 0$ für alle $n \geq N$. Es folgt $f(x_n) = \frac{1}{x_n}$ für alle bis auf endlich viele Folgenglieder. Weil sich diese auf das Grenzwertverhalten nicht auswirken, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} \quad = \quad \frac{1}{a} \quad = \quad f(a).$$

Aufgabe 3

zu (a)



zu (b) Zunächst beweisen wir die Stetigkeit der Funktion im Punkt $\frac{1}{4}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = \frac{1}{4}$. Zu zeigen ist $\lim_n f(x_n) = f(\frac{1}{4})$. Auf Grund der Konvergenz gibt es für $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \frac{1}{4}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Es folgt $x_n > \frac{1}{4} - \varepsilon = 0$ und $x_n < \frac{1}{4} + \varepsilon = \frac{1}{2} < 1$ für alle $n \geq N$. Nach Definition der unteren Gaußklammer ist damit $\lfloor x_n \rfloor = 0$ und $f(x_n) = x_n - \lfloor x_n \rfloor = x_n - 0 = x_n$ für alle $n \geq N$. Weil sich endlich viele Folgenglieder auf das Konvergenzverhalten nicht auswirken, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} x_n \quad = \quad \tfrac{1}{4} \quad = \quad \tfrac{1}{4} - \lfloor \tfrac{1}{4} \rfloor \quad = \quad f(\tfrac{1}{4}).$$

Um zu zeigen, dass f im Punkt 2 unstetig ist, betrachten wir die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $1 \leq x_n < 2$ gilt $\lfloor x_n \rfloor = 1$ und $f(x_n) = x_n - \lfloor x_n \rfloor = x_n - 1 = 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) \quad = \quad 1 \neq 2 \quad = \quad f(2).$$

zu (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = f(n) = n - \lfloor n \rfloor = n - n = 0$. Es folgt $\lim_n a_n = 0$.

zu (d) Nehmen wir an, der Grenzwert $c = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existiert. Dann gilt $\lim_n f(x_n) = c$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n x_n = +\infty$. Für die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Aufgabenteil (c) ist die Voraussetzung $\lim_n n = +\infty$ erfüllt; daraus folgt $c = \lim_n f(n) = \lim_n a_n = 0$.

Betrachten wir nun andererseits die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $\lim_n x_n = n + \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zunächst zeigen wir, dass $\lim_n x_n = +\infty$ auch für diese Folge erfüllt ist. Sei dazu $\kappa \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $N > \kappa$ gilt, dann folgt $x_n = n + \frac{1}{2} > n > \kappa$ für alle $n \geq N$. Damit ist $\lim_n x_n = +\infty$ nachgewiesen. Wegen $n \leq x_n < n + 1$ gilt $\lfloor x_n \rfloor = n$ und $f(x_n) = x_n - \lfloor x_n \rfloor = (n + \frac{1}{2}) - n = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition von $c = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ gilt damit auch $c = \lim_n f(x_n) = \frac{1}{2}$. Der Widerspruch $0 = c = \frac{1}{2}$ zeigt, dass die Annahme falsch war und der Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ nicht existiert.