

Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 8 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Es muss eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ gegeben, so dass $b_k = a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Für die Angabe von Teilfolgen der Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es viele Möglichkeiten. Wählt man zum Beispiel eine beliebige Konstante $r \in \mathbb{N}$ und setzt $n_k = rk$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann erhält man die Teilfolge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $b_k = a_{rk} = \frac{1}{rk}$. Damit sind bereits unendlich viele verschiedene Teilfolgen von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert, zum Beispiel $(\frac{1}{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(\frac{1}{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{4n})_{n \in \mathbb{N}}$. Setzt man $n_k = k^r$, dann ist die entsprechende Teilfolge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $b_k = a_{k^r} = \frac{1}{k^r} = k^{-r}$. Auch dies liefert unendlich viele verschiedene Teilfolgen von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

zu (b) Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn für beliebig vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils $|a_n - a| < \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Der einzige Häufungspunkt der konstanten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gegeben durch $a_n = a$ ist a . Dass a ein Häufungspunkt ist, sieht man daran, dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils $|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, insbesondere also für unendlich viele n . Ist $b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq a$ und setzt man $\varepsilon = |a - b|$, dann ist $|a_n - b| = |b - a| < \varepsilon$ für kein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Somit ist b kein Häufungspunkt von a .

zu (c) Eine Zahl a ist genau dann Häufungspunkt einer Folge, wenn diese Folge eine Teilfolge besitzt, die gegen a konvergiert.

zu (d) Nach Definition gilt $\limsup_n a_n = \lim_n \sup A_n$ und $\liminf_n a_n = \lim_n \inf A_n$, wobei $A_n = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}, m \geq n\}$ gilt. Für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$ gilt $A_n = \{-1, 1\}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $\limsup_n a_n = \lim_n \sup\{-1, 1\} = \lim_n 1 = 1$ und $\liminf_n a_n = \lim_n \inf\{-1, 1\} = \lim_n -1 = -1$.

zu (e) Die n -te Partialsumme einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist nach Definition gegeben durch $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Nach Definition konvergiert die Reihe gegen ein $a \in \mathbb{R}$, wenn $\lim_n s_n = a$ gilt.

Aufgabe 1

zu (a) Zunächst zeigen wir, dass 1 ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \varepsilon^{-2}$ gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Ist n zusätzlich gerade, dann gilt $|a_n - 1| = |1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Weil es unendlich viele geradzahlige $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \varepsilon^{-2}$ gibt, existieren auch unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 1| < \varepsilon$, und folglich ist 1 ein Häufungspunkt.

Auch -1 ist ein Häufungspunkt der Folge. Ist nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben und $n \in \mathbb{N}$ ungerade mit $n > \varepsilon^{-2}$, dann gilt $|a_n - (-1)| = |(-1) + \frac{1}{\sqrt{n}} - (-1)| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Also gibt es auch unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - (-1)| < \varepsilon$, und damit ist auch -1 ein Häufungspunkt.

Nehmen wir an, dass ein weiterer Häufungspunkt $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert. Sei $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{|a - 1|, |a - (-1)|\} \in \mathbb{R}^+$ und $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $N > \varepsilon^{-2}$ gilt. Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gerade, dann gilt $|a_n - 1| < \varepsilon$, wie oben gezeigt. Würde $|a_n - a| < \varepsilon$ gelten, dann würden wir insgesamt

den Widerspruch

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2}|a-1| = \frac{1}{2}|a-a_n+a_n-1| \leq \frac{1}{2}|a_n-a| + \frac{1}{2}|a_n-1| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

erhalten. Ist n ungerade, dann gilt $|a_n - (-1)| < \varepsilon$. In diesem Fall würde sich aus $|a_n - a| < \varepsilon$ der Widerspruch

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2}|a - (-1)| = \frac{1}{2}|a - a_n + a_n - (-1)| \leq \frac{1}{2}|a_n - a| + \frac{1}{2}|a_n - (-1)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

ergeben. Insgesamt ist damit gezeigt, dass kein $n \geq N$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ existiert. Es gibt also höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$, und folglich ist a kein Häufungspunkt der Folge.

zu (b) Nehmen wir an, dass $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt der Folge ist. Dann gibt es insbesondere unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$. Es folgt $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Aber wegen $\lim_n a_n = +\infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 1 + |a|$ für alle $n \geq N$. Es können also höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < 1 + |a|$ existieren. Der Widerspruch zeigt, dass die Folge keine Häufungspunkte besitzt.

Aufgabe 2

zu (a) Sei $A_n = \{a_m \mid m \geq n\}$, $B_n = \{b_m \mid m \geq n\}$ und $C_n = \{a_m + b_m \mid m \geq n\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\tilde{a}_n = \sup A_n$, $\tilde{b}_n = \sup B_n$ und $\tilde{c}_n = \sup C_n$. Nach Definition gilt $\limsup_n a_n = \lim_n \tilde{a}_n$, $\limsup_n b_n = \lim_n \tilde{b}_n$ und $\limsup_n (a_n + b_n) = \lim_n \tilde{c}_n$. Zu zeigen ist also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{b}_n.$$

Nach Satz (8.11) genügt es dafür der Nachweis, dass $\tilde{c}_n \leq \tilde{a}_n + \tilde{b}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Nach Definition ist $\tilde{a}_n$ eine obere Schranke von A_n , also gilt $\tilde{a}_n \geq a_m$ für alle $m \geq n$. Ebenso gilt $\tilde{b}_n \geq b_m$ für alle $m \geq n$, da $\tilde{b}_n$ eine obere Schranke von B_n ist. Es folgt $\tilde{a}_n + \tilde{b}_n \geq a_m + b_m$ für alle $m \geq n$. Somit ist $\tilde{a}_n + \tilde{b}_n$ eine obere Schranke von C_n . Weil $\tilde{c}_n$ die kleinste obere Schranke von C_n ist, folgt daraus $\tilde{c}_n \leq \tilde{a}_n + \tilde{b}_n$.

zu (b) Seien die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Bezeichnungen A_n , B_n und C_n seien wie in Aufgabenteil (a) definiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n = \{-1, 1\}$, denn dies sind die einzigen Werte, die von der Folge angenommen werden, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es Werte $m, m' \geq n$ mit $(-1)^m = -1$ und $(-1)^{m'} = 1$. Es folgt

$$\limsup_n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{-1, 1\} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Ebenso erhält man

$$\limsup_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{-1, 1\} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Andererseits ist $a_n + b_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n(1 + (-1)) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als konstante Folge nur einen Häufungspunkt besitzt, gilt $\limsup_n (a_n + b_n) = 0$. Insgesamt gilt also

$$\limsup_n (a_n + b_n) = 0 < 2 = \limsup_n a_n + \limsup_n b_n.$$

Aufgabe 3

zu (a) Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und entsprechend $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so dass $b_k = a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Zum Nachweis von $\lim_k b_k = a$ sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wegen $\lim_n a_n = a$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Weil es sich bei $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ um eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ handelt, muss es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $n_K \geq N$ geben. Für alle $k \geq K$ gilt dann $n_k \geq n_K \geq N$, und es folgt $|b_k - a| = |a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Damit ist $\lim_k b_k = a$ nachgewiesen.

zu (b) Setzen wir voraus, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zu zeigen ist, dass dasselbe für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gilt. Sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nach Voraussetzung gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n = b_n$ für alle $n \geq N_0$, außerdem existiert der Grenzwert $s = \lim_n s_n$. Auf Grund des Grenzwertsatzes der Addition existiert dann auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N_0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{N_0-1} a_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(s_n - \sum_{k=1}^{N_0-1} a_k \right).$$

Dies wiederum impliziert, dass auch der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{N_0-1} b_k + \sum_{k=N_0}^n b_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{N_0-1} b_k + \sum_{k=N_0}^n a_k \right)$$

existiert. Damit ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ bewiesen. Der Beweis, dass umgekehrt aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt, läuft vollkommen analog.

zu (c) Nein. Seien zum Beispiel die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $a_1 = 1$, $a_n = 0$ für alle $n \geq 2$ und $b_1 = 2$, $b_n = 0$ für alle $n \geq 2$. Dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n \geq 2$. Die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ und $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$ der beiden Reihen sind gegeben durch $s_n = 1$ und $t_n = 2$ für alle $n \geq 2$. Es gilt also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 2,$$

insbesondere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.