Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 8 —

(Globalübungsblatt)

zu (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = \{a_m \mid m \geq n\}$. Nach Definition von Limes superior und Limes inferior gilt $\limsup_n a_n = \lim_n \sup A_n$ und $\liminf_n a_n = \lim_n \inf A_n$. Um diese zu berechnen, zeigen wir zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils

$$\inf A_n = -1 \qquad \text{und} \qquad \sup A_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{n+1} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \qquad \text{gilt.}$$

Zum Beweis der ersten Gleichung sei $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Dann ist -1 sogar das Minimum von An. Ist nämlich $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ gerade, dann gilt $a_m = -1$, somit ist jedenfalls -1 in A_n enthalten. Außerdem gilt für jedes $m \geq n$ jeweils $a_m = -1$ oder $a_m = \frac{1}{m}$, also in jedem Fall $a_m \geq -1$. Dies zeigt, dass -1 eine untere Schranke von A_n ist.

Zum Beweis der zweiten Gleichung sei $n \in \mathbb{N}$ zunächst ungerade. Dann gilt $a_n = \frac{1}{n}$ und somit $\frac{1}{n} \in A_n$. Für gerades $m \geq n$ gilt $a_m = -1 \leq \frac{1}{n}$, für ungerades $m \geq n$ ist $a_m = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}$. Also ist $a_m \leq \frac{1}{n}$ für alle $m \geq n$ erfüllt, und folglich ist $\frac{1}{n}$ eine obere Schranke von A_n. Insgesamt gilt also $\sup A_n = \max A_n = \frac{1}{n}$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gilt $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ und wegen $n+1 \geq n$ somit $\frac{1}{n+1} \in A_n$. Ist $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ gerade, dann gilt $a_m = -1 \leq \frac{1}{n+1}$. Ist $m \geq n$ ungerade, dann gilt sogar $m \geq n+1$ und somit $a_m = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n+1}$. Insgesamt ist damit gezeigt, dass $\frac{1}{n+1}$ das Maximum, und somit auch das Supremum, von A_n ist.

Aus der ersten Gleichung folgt unmittelbar $\liminf_n a_n = \lim_n \inf A_n = \lim_n -1 = -1$. Zum Beweis der Gleichung $\limsup_n a_n = 0$ sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Für alle $n \geq N$ gilt auf Grund der oben bewiesenen Gleichung jeweils $0 \leq \sup A_n \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ und insbesondere $|\sup A_n| < \varepsilon$. Daraus folgt $\limsup_n a_n = \lim_n \sup A_n = 0$.

zu (b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $-1 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \leq 1$. Laut Vorlesung ist $\limsup_n a_n = 0$ damit der größte und $\liminf_n a_n = -1$ der kleinste Häufungspunkt der Folge. Nehmen wir an, dass $a \in \mathbb{R}$ ein von -1 und 0 verschiedener Häufungspunkt der Folge ist. Dann muss also $-1 < a < 0$ gelten.

Um dies zu einem Widerspruch zu führen, wählen wir $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so klein, dass $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\; \subseteq \;]-1, 0[$ erfüllt ist. Dafür muss lediglich $a - \varepsilon > -1 \Leftrightarrow \varepsilon < a+1$ und $a + \varepsilon < 0 \Leftrightarrow \varepsilon < -a$, also insgesamt $\varepsilon < \min\{-a, a+1\}$ gelten. Weil a ein Häufungspunkt ist, muss es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ geben. Insbesondere gilt dann $a_n > -1$ und $a_n < 0$ für all diese n. Aber nach Definition der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist diese Bedingung für kein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, denn entweder ist $a_n = -1$, oder a_n ist positiv.

Hinweis:

Insgesamt wäre auch eine andere Vorgehensweise denkbar gewesen: Man zeigt bereits in Teil (a), dass die Folge beschränkt und -1 und 0 die einzigen Häufungspunkte der Folge sind. Dabei muss dann allerdings auch ausgeschlossen werden, dass es Häufungspunkte a mit $a > 0$ oder $a < -1$ gibt. Anschließend kann man verwenden, dass der Limes superior stets der größte und der Limes inferior der kleinste Häufungspunkt einer beschränkten Folge ist. In Aufgabenteil (b) ist dann nichts mehr zu tun.

Aufgabe 2

zu (a) Zunächst bemerken wir, dass nach Definition für gerades $n \in \mathbb{N}$ jeweils $a_n = \frac{1}{n}$, und für ungerades $n \in \mathbb{N}$ jeweils $a_n = 2n - \frac{1}{n}$ gilt. Zunächst überprüfen wir, dass 0 ein Häufungspunkt der Folge ist. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$ gibt. Dazu wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{N} < \varepsilon$ erfüllt ist. Dann gilt $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Es gibt unendlich viele gerade $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Für diese gilt jeweils $a_n = \frac{1}{n}$, also $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$.

Nehmen wir nun an, dass $a \in \mathbb{R}$ ein von Null verschiedener Häufungspunkt der Folge ist. Zunächst betrachten wir den Fall $a < 0$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ nur negative reelle Zahlen enthält. Dies ist zum Beispiel erfüllt, wenn wir $\varepsilon = -\frac{1}{2}a$ setzen, denn dann ist $a + \varepsilon = a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a < 0$. Weil a Häufungspunkt ist, müsste $a_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gelten. Dies ist aber für kein einziges $n \in \mathbb{N}$ der Fall, denn jedes a_n ist positiv. Für gerades n ist dies offensichtlich, und auch für ungerades n gilt $a_n = 2n - \frac{1}{n} \geq 2n - 1 > 0$.

Betrachten wir nun den Fall $a > 0$, und setzen wir $\varepsilon = \frac{1}{2}a$. Wieder müsste das Intervall $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \left]\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}a\right[$ auf Grund der Häufungspunkt-Eigenschaft unendlich viele Folgenglieder a_n enthalten. Um zu zeigen, dass dies nicht der Fall ist, wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $2N - 1 > 2a \Leftrightarrow N > a + \frac{1}{2}$ und zugleich $\frac{1}{N} < \frac{1}{2}a \Leftrightarrow N > \frac{2}{a}$, insgesamt also $N > \max\{a + \frac{1}{2}, \frac{2}{a}\}$ erfüllt ist. Dann ist kein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ in $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ enthalten. Denn ist ein solches n ungerade, dann gilt $a_n = 2n - \frac{1}{n} \geq 2n - 1 \geq 2N - 1 > 2a > \frac{3}{2}a$. Ist es gerade, dann gilt $a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{1}{2}a$. Insgesamt enthält $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ also höchstens N Folgenglieder, und somit ist a auch im Fall $a > 0$ kein Häufungspunkt.

zu (b) Nehmen wir an, dass $z \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt der Folge ist. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt. Dann gibt es also unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - z| < \varepsilon$. Wegen $|a_n| \leq |a_n - z| + |z| < |z| + \varepsilon$ gibt es auch unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < |z| + \varepsilon$. Andererseits gibt es wegen $\lim_n |a_n| = +\infty$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| > |z| + \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dies zeigt, dass $|a_n| < |z| + \varepsilon$ nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Wir erhalten somit einen Widerspruch; dies zeigt, dass für die Folge kein Häufungspunkt existiert.

zu (c) Sei $a \in [0, 1]$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass es sich bei a um einen Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ handelt.

Zunächst betrachten wir den Fall $a < 1$. Nehmen wir an, dass a kein Häufungspunkt ist. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass das Intervall $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ nur endlich viele Folgenglieder enthält. Diese Aussage bleibt erfüllt, wenn wir ε durch einen Wert kleiner als $1 - a$ ersetzen; deshalb dürfen wir $\varepsilon < 1 - a$ annehmen. Da insbesondere auch $M_\varepsilon = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\ ,\ a < a_n < a + \varepsilon\}$ eine endliche Menge ist, existiert $c = \min M_\varepsilon$. Wegen $a_n > a$ für alle $a_n \in M_\varepsilon$ gilt auch $c > a$. Weil nun die Menge $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es ein $d \in]a, c[\cap \mathbb{Q}$. Es gilt $d > a > 0$, außerdem $d < a + \varepsilon = a + (1 - a) = 1$, also $d \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Nach Definition der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muss es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d = a_n$ geben. Aber daraus folgt dann $d \in M_\varepsilon$, was der Minimalität von c widerspricht. Der Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war, und dass a ein Häufungspunkt der Folge ist.

Im Fall $a = 1$ ist die Vorgehensweise weitgehend analog. Nehmen wir an, 1 ist kein Häufungspunkt der Folge. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass das Intervall $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ nur endlich viele Folgenglieder enthält. Dabei dürfen wir $\varepsilon < 1$ annehmen. Insbesondere ist $M_\varepsilon = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\ ,\ 1 > a_n > 1-\varepsilon\}$ eine endliche Menge, folglich existiert $c = \max M_\varepsilon$. Wegen $a_n < 1$ für alle $a_n \in M_\varepsilon$ gilt auch $c < 1$. Weil $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es ein $d \in]c, 1[\cap \mathbb{Q}$. Es gilt $d > c > 1 - \varepsilon > 0$ und $d < 1$, insgesamt also $d \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Nach Definition der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $d = a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $d \in M_\varepsilon$, im Widerspruch zur Maximalität von c. Der Widerspruch zeigt, dass auch 1 ein Häufungspunkt der Folge ist.

Aufgabe 3

zu (a) Nach Voraussetzung existieren die Grenzwerte $c = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ und $d = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ in $\mathbb{R}$. Zu zeigen ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = c + d$. Bezeichnet $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dann müssen wir also $\lim_n s_n = c + d$ nachweisen. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wegen $c = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|c - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N_1$. Wegen $d = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ gibt es ebenso ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|d - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Ist n ungerade, $n = 2m - 1$ mit $m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$s_n \quad = \quad s_{2m-1} \quad = \quad \sum_{k=1}^{2m-1} a_k \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{m-1} a_{2k}.$$

Die erste Teilsumme liegt nahe bei c, wenn $m \geq N_1 \Leftrightarrow n = 2m - 1 \geq 2N_1 - 1$ erfüllt ist. Die zweite Teilsamme liegt nahe bei d, wenn $m - 1 \geq N_2 \Leftrightarrow 2m - 2 \geq 2N_2 \Leftrightarrow n \geq 2m - 1 \geq 2N_2 + 1$ erfüllt ist. Ist also $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2N_1 - 1$ und $n \geq 2N_2 + 1$, dann gilt

$$|s_n - (c+d)| \quad = \quad |s_{2m-1} - (c+d)| \quad \leq \quad \left|\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} - c\right| + \left|\sum_{k=1}^{m-1} a_{2k} - d\right| \quad < \quad \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad = \quad \varepsilon.$$

Ist n dagegen gerade, $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$s_n \quad = \quad s_{2m} \quad = \quad \sum_{k=1}^{2m} a_k \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{m} a_{2k}.$$

Die erste Teilsumme liegt nahe bei c, wenn $m \geq N_1 \Leftrightarrow n = 2m \geq 2N_1$ gilt, und die zweite Teilsumme liegt nahe bei d, wenn $m \geq N_2 \Leftrightarrow n = 2m \geq 2N_2$ gilt. Ist also $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2N_1$ und $n \geq 2N_2$, dann gilt

$$|s_n - (c+d)| \quad = \quad |s_{2m} - (c+d)| \quad \leq \quad \left|\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} - c\right| + \left|\sum_{k=1}^{m} a_{2k} - d\right| \quad < \quad \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad = \quad \varepsilon.$$

Setzen wir also $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, dann ist $|s_n - (c+d)| < \varepsilon$ für alle (ungeraden oder geraden) $n \geq N$ erfüllt

zu (b) Nein, die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. In der Vorlesung wurde beispielsweise gezeigt, dass die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegeben durch $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konvergiert. Andererseits gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{1}{2n} = (-\frac{1}{2})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Weil die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$.