Lösung Globalübungsblatt 7

Erinnerung: Definition der Konvergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und $a \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ bedeutet:

Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Aufgabe 1

zu (a) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-\sqrt{n}+7}{2n+\sqrt{n}+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{7}{n}}{2+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{3}{n}}$

Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz $\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \varepsilon^{-1}$ $\Leftrightarrow n > \varepsilon^{-2}$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \varepsilon^{-2}$. Für alle $n \geq N$ gilt dann $n > \varepsilon^{-2}$, also (s.o.) $\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$. ($\Rightarrow$ Beh.)

Wir erhalten somit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-\sqrt{n}+7}{2n+\sqrt{n}+3} = \dfrac{1-\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} + \lim_n \frac{7}{n}}{2+\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} + \lim_n \frac{3}{n}}$

$= \dfrac{1-0+0}{2+0+0} = \dfrac{1}{2}$.

Bem.: In Kürze werden wir in der Vorlesung zeigen, dass die Wurzelfunktion $\sqrt{}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist. Dies bedeutet, dass man Grenzwerte in die Funktion „hineinziehen" darf, d.h. für jede konvergente

Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.

Damit lässt sich der Beweis der Gleichung $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ deutlich abkürzen: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \sqrt{0} = 0.$$

<u>zu 1b)</u> geg.: Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 2$

z.zg.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n - \sqrt{2}| = \frac{|(a_n - \sqrt{2})(a_n + \sqrt{2})|}{|a_n + \sqrt{2}|} = \frac{|a_n^2 - 2|}{|a_n + \sqrt{2}|}$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 2$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n^2 - 2| < \varepsilon \ \forall n \geq N$. $a_n \in \mathbb{R}_+ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n + \sqrt{2}| = a_n + \sqrt{2} \geq \sqrt{2} > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ Für alle $n \geq N$ gilt also

$$|a_n - \sqrt{2}| = \frac{|a_n^2 - 2|}{|a_n + \sqrt{2}|} \leq |a_n^2 - 2| < \varepsilon.$$

<u>Bem.:</u> In der Übung wurde die Frage gestellt, ob sich der Beweis nicht auch durch folgende kurze Rechnung führen lässt: Es gilt

$$2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right),$$

woraus man durch Wurzelziehen auf beiden Seiten $\sqrt{2} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ erhält. Das Problem bei dieser Argumentation ist, dass durch die Verwendung des Ausdrucks $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ die Existenz des Grenzwerts als reelle Zahl bereits vorausgesetzt wird. Der Nachweis der Existenz ist aber gerade das hauptsächliche Problem.

<u>zu (c)</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(\sqrt{n+\sqrt{2n}} - \sqrt{n-\sqrt{2n}}\right)^2 = (n+\sqrt{2n}) + (n-\sqrt{2n}) - 2\sqrt{(n+\sqrt{2n})(n-\sqrt{2n})}$$

$$= 2n - 2\sqrt{n^2-2n} = \frac{(2n+2\sqrt{n^2-2n})(2n-2\sqrt{n^2-2n})}{2n+2\sqrt{n^2-2n}}$$

$$= \frac{4n^2-4(n^2-2n)}{2n+2\sqrt{n^2-2n}} = \frac{8n}{2n+2\sqrt{n^2-2n}} \overset{(*)}{=} \frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}$$

(*) beachte: $\frac{1}{n}\sqrt{n^2-2n} = \sqrt{\frac{1}{n^2}}\cdot\sqrt{n^2-2n} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot(n^2-2n)} = \sqrt{1-\frac{2}{n}}$

<u>Beh.:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1-\frac{2}{n}} = 1$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\sqrt{1-\frac{2}{n}} - 1\right| = \left|\frac{(\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1)(\sqrt{1-\frac{2}{n}}-1)}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1}\right| = \left|\frac{(1-\frac{2}{n})-1}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1}\right| = \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1} \leq \frac{2}{n}$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{n} = \left|\frac{2}{n} - 0\right| < \varepsilon$ $\forall n \geq N \Rightarrow \left|\sqrt{1-\frac{2}{n}} - 1\right| < \varepsilon$ $\forall n \geq N \Rightarrow$ Beh.

Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{2n}} - \sqrt{n-\sqrt{2n}}\right)^2 \overset{\text{s.o.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{2}{n}}} = \frac{4}{1+\lim_n \sqrt{1-\frac{2}{n}}} \underset{\uparrow\,\text{Bek.}}{=} \frac{4}{1+1} = 2$$

Die Zahlen $a_n = \sqrt{n+\sqrt{2n}} - \sqrt{n-\sqrt{2n}}$ sind wegen $n+\sqrt{2n} > n-\sqrt{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ nichtnegativ, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 2$. Aus Teil (b) folgt also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

<u>Bem.:</u> Auch der Beweis der Gleichung $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1-\frac{2}{n}} = 1$ lässt sich stark abkürzen, wenn man die Stetigkeit der Wurzelfunktion zur Verfügung hat:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1-\frac{2}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)} = \sqrt{1-\lim \frac{2}{n}} = \sqrt{1-0} = 1.$$

Aufgabe 2

zu (a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bedeutet: Für jedes $K \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > K$ $\forall n \geq N$.

z.zg.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz $|a_n^{-1} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n|^{-1} < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n| > \varepsilon^{-1}$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > \varepsilon^{-1}$ $\forall n \geq N$.

$\Rightarrow |a_n| > \varepsilon^{-1}$ $\forall n \geq N$ $\overset{\text{s.o.}}{\Leftrightarrow}$ $|a_n^{-1} - 0| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$.

Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0$ nachgewiesen.

unzulässig: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{+\infty} = 0$

(Das ist kein Beweis, sondern nur eine Wiederholung der behaupteten Aussage.)

zu (b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

z.zg.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = +\infty$ Sei $K \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz $a_n^{-1} > K \iff a_n < K^{-1} \overset{a_n\in\mathbb{R}^+}{\iff}$ $|a_n| < K^{-1} \iff |a_n - 0| < K^{-1}$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 0| < K^{-1}\ \forall n \geq N$.

Es folgt $a_n^{-1} > K\ \forall n \geq N$. Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = +\infty$ nachgewiesen.

zu (c) Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen ist (i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent

(iii) $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert weder uneigentlich gegen $+\infty$ noch uneigentlich gegen $-\infty$

zu (i) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ $\forall n \geq N \Rightarrow |a_n - 0| = |(-1)^n \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} = |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon\ \forall n \geq N$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

zu (ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n^{-1} = (-1)^n n$.

Wäre $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann lt. Vorlesung auch beschränkt.

Es gäbe also ein $s \in \mathbb{R}^+$ mit $|a_n^{-1}| \leq s\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ist aber $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s$, dann gilt $|a_n^{-1}| = |(-1)^n n| = n > s$. ↯

Dies zeigt, dass (a_n^{-1}) nicht konvergiert.

zu (iii) Ang. es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = +\infty$. Dann gilt es für $K=1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n^{-1} > K$ $\forall\, n \geq N$. Dann wäre insb. $a_n^{-1} \in \mathbb{R}^+$ $\forall\, n \geq N$. Ist aber $n \in \mathbb{N}$ ungerade Zahl mit $n \geq N$, dann gilt $a_n^{-1} = (-1)^n\, n = -n < 0$. ↯

Ang. es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = -\infty$. Dann gilt es für $K=1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n^{-1} < -K$ $\forall\, n \geq N$. Dann wäre insb. $a_n^{-1} < 0$ $\forall\, n \geq N$. Ist aber $n \in \mathbb{N}$ gerade Zahl mit $n \geq N$, dann gilt $a_n^{-1} = (-1)^n\, n = n > 0$. ↯ $\square$

Aufgabe 3

zu (a) Vor.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 1$ z.zg.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0 \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine Teilfolge mit Grenzwert 0
Laut Vorlesung ist 0 ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 1 \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine Teilfolge mit Grenzwert 1
Laut Vorlesung ist 1 ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Also hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mind. zwei verschiedene Häufungspunkte.

Ang. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Dann wäre a lt. Vl. der einzige Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ↯.

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

alternativer Lösungsansatz (etwas länger):

Ang. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lt. Vl. insb. eine Cauchyfolge. Für jedes $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ gibt es dann ein $N\in\mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon \; \forall n \geq m \geq N$. Insb. gibt es für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $N\in\mathbb{N}$ mit $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2} \; \forall n \geq N$.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ gibt es andererseits ein $N_1\in\mathbb{N}$ mit $|a_{2n}| = |a_{2n} - 0| < \frac{1}{4} \; \forall n \geq N_1$. Insbesondere gilt $a_{2n} < \frac{1}{4}$ für alle $n \geq N_1$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 1$ existiert ein $N_2\in\mathbb{N}$ mit $|a_{2n+1} - 1| < \frac{1}{4} \; \forall n \geq N_2$. Für diese n gilt also insbesondere $a_{2n+1} > 3/4$. Sei nun $n\in\mathbb{N}$ mit $n \geq \max\{N_1, N_2, N\}$. Dann gilt $|a_{2n+1} - a_n| > \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ und wegen $2n \geq n \geq N$ andererseits $|a_{2n+1} - a_n| < \frac{1}{2}$, Widerspruch.

<u>zu (b)</u> geg. eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und ein $c\in\mathbb{R}$ mit

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = c$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = c$ z. zg.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ vorgeg. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = c$ gibt es ein $N_1\in\mathbb{N}$ mit $|a_{2n} - c| < \varepsilon \; \forall n \geq N_1$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = c$ gibt es ein $N_2\in\mathbb{N}$ mit $|a_{2n+1} - c| < \varepsilon \; \forall n \geq N_2$. Sei nun

$N = \max\{2N_1, 2N_2+1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Ist n gerade, $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $2k \geq 2N_1$, also $k \geq N_1$ und somit $|a_n - c| = |a_{2k} - c| < \varepsilon$. Ist n ungerade, $n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $2k+1 \geq 2N_2+1$, also $k \geq N_2$, und somit $|a_n - c| = |a_{2k+1} - c| < \varepsilon$. Insgesamt ist $|a_n - c| < \varepsilon$ also für alle $n \geq N$ erfüllt. $\square$