Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 6 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Eine induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist ein Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $1 \in M$ gilt und für jedes $x \in M$ auch $x+1$ in M liegt.

zu (b) Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$. Jede induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$, die in $\mathbb{N}$ liegt, stimmt mit $\mathbb{N}$ überein.

zu (c) Für alle a, b im bewerteten Körper gilt $|a+b| \le |a| + |b|$.

zu (d) Ja. Laut Vorlesung ist $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen, und dies bedeutet, dass nicht-konstante Polynom über $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle besitzt, insbesondere das Polynom $z^4 - z^3 - 2z - 6$. Jede Nullstelle dieses Polynoms erfüllt die angegebene Gleichung.

zu (e) Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$, dann gilt $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$. Wenden wir auf diese Gleichung die komplexe Konjugation an, so erhalten wir $\sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = 0$, denn wegen $a_k \in \mathbb{R}$ gilt jeweils $a_k = \bar{a}_k$ für $0 \le k \le n$. Es gilt also auch $f(\bar{z}) = 0$. Dies zeigt, dass die nicht-reellen Nullstellen in konjugiert-komplexen Paaren auftreten. Setzen wir als bekannt voraus, dass jedes Polynom über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ nur endlich viele Nullstellen hat, dann muss die Anzahl der nicht-reelle Nullstellen gerade sein.

Aufgabe 1

zu (a) Nach Definition gilt $1 \in M$. Setzen wir nun $x \in M$ voraus, dann ist $x + 1 \in M$ zu zeigen. Aus $x \in M$ folgt $x = 1$ oder $x \ge 2$. Betrachten wir zuerst den Fall $x = 1$. Dann gilt $x+1 = 1+1 = 2 \in\in [2, +\infty[$ und somit $x + 1 \in M$. Im Fall $x \ge 2$ gilt $x + 1 \ge 2 + 1 \ge 2$, also ebenfalls $x + 1 \in [2, +\infty[$ und somit $x + 1 \in M$.

zu (b) Nehmen wir an, dass ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1 < n < 2$ existiert. Laut Vorlesung ist $\mathbb{N}$ in jeder induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthalten. Weil M nach Teil (a) induktiv ist, gilt also $n \in M$ und somit $n = 1$ oder $n \ge 2$. Aber beides steht im Widerspruch zu $1 < n < 2$. Also existiert kein $n \in \mathbb{N}$ mit $1 < n < 2$.

zu (c) Nehmen wir an, es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $m < n < m + 1$. Dann folgt $m - (m-1) < n - (m-1) < (m+1) - (m-1)$ und somit $1 < n - (m-1) < 2$. Weil $\mathbb{Z}$ ein Ring ist, ist das Element $a = n - (m-1) = n - m + 1$ in $\mathbb{Z}$ enthalten. Wegen $a > 1 > 0$ gilt darüber hinaus $a \in \mathbb{R}^+$, und weil laut Vorlesung $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{N}$ gilt, folgt $a \in \mathbb{N}$. Aber nach Teil (b) gibt es kein $a \in \mathbb{N}$ mit $1 < a < 2$. Unsere Annahme hat also zu einem Widerspruch geführt.

Aufgabe 2

zu (a) Seien $z, w \in \mathbb{K}$ vorgegeben. Weil jede Bewertung laut Vorlesung die Dreiecksungleichung erfüllt, gilt $|z| = |(z-w) + w| \le |z-w| + |w|$. Es folgt $|z| - |w| \le |z-w|$. Durch die Rechnung $|w| = |(w-z) + z| \le |w-z| + |z|$ erhalten wir $|w| - |z| \le |w-z| = |-(z-w)|$. Wäre der letzte Term gleich $|z-w|$, dann würden wir aus $|z|-|w| \le |z-w|$ und $|w|-|z| \le |z-w|$ insgesamt $||z|-|w|| \le |z-w|$ erhalten, denn $||z|-|w||$ stimmt nach Definition mit einer der reellen Zahlen $|z|-|w|$ oder $|w|-|z|$ überein.

Dazu müssen wir aber noch zeigen, dass $|x| = |-x|$ für alle $x \in \mathbb{K}$ erfüllt ist. Weil $\mathbb{K}$ ein Körper ist, gilt $0_{\mathbb{K}} \neq 1_{\mathbb{K}}$, und nach Definition der Bewertungen folgt daraus $|1_{\mathbb{K}}| \neq 0$. Aus $|1_{\mathbb{K}}||1_{\mathbb{K}}| = |1_{\mathbb{K}} \cdot 1_{\mathbb{K}}| = |1_{\mathbb{K}}|$ erhalten wir deshalb $|1_{\mathbb{K}}| = 1$. Wegen $|-1_{\mathbb{K}}|^2 = |(-1_{\mathbb{K}})^2| = |1_{\mathbb{K}}| = 1$ und $|-1_{\mathbb{K}}| \geq 0$ folgt $|-1_{\mathbb{K}}| = 1$. Ist nun $x \in \mathbb{K}$ vorgegeben, dann gilt $|-x| = |(-1_{\mathbb{K}})x| = |-1_{\mathbb{K}}||x| = 1 \cdot |x| = |x|$.

zu (b) Offenbar ist 1 eine Lösung der Gleichung. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ eine weitere. Aus $z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$ folgt $z - 1 = 0$ oder $z^2 + z + 1 = 0$. Setzen wir $z \neq 1$ voraus, dann muss also die $z^2 + z + 1 = 0$ gelten. Wir formen diese Gleichung durch Bildung einer quadratischen Ergänzung um.

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + z + \tfrac{1}{4} = -\tfrac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad (z + \tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}i)^2$$

Dabei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass $(\frac{1}{2}\sqrt{3}i)^2 = (\frac{1}{2})^2\sqrt{3}^2 i^2 = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot (-1) = -\frac{3}{4}$ gilt. Nun ist die Gleichung $(z + \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{3}i)^2$ erfüllt, wenn entweder $z + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ oder $z + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}i$ gilt. Im ersten Fall erhalten wir $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, im zweiten $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ als Lösung der Ausgangsgleichung.

Aufgabe 3

zu (a) Sei $M \subseteq \mathbb{Z}$ nicht-leer und nach unten beschränkt. Dann besitzt M auf Grund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ein Infimum $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $a + 1$ keine untere Schranke von M, es gibt also ein $m \in M$ mit $a \leq m < a + 1$. Dieses m muss das kleinste Element von M sein (woraus dann $a = m$ folgt), denn wegen $M \subseteq \mathbb{Z}$ würde $m' \leq m - 1 < a$ für jedes noch kleinere $m' \in M$ gelten, im Widerspruch dazu, dass a eine untere Schranke von M ist.

Der Nachweis eines größten Elements läuft weitgehend analog. Sei $M \subseteq \mathbb{Z}$ eine nicht-leere, nach oben beschränkte Menge. Dann existiert $b = \sup(M)$ in $\mathbb{R}$. Das Element $b - 1$ ist keine obere Schranke von M, folglich gibt es ein $m \in M$ mit $m > b - 1$. Es folgt $b - 1 < m \leq b$. Nun ist m das größte Element von M (und somit $b = m$), denn für jedes noch größere $m' \in M$ würde $m' \geq m + 1 > b$ gelten, im Widerspruch dazu, dass b eine obere Schranke von M ist.

Anmerkung: Man kann den ersten Teil auch lösen, indem man verwendet, dass jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein kleinstes Element besitzt. Ist $M \subseteq \mathbb{Z}$ nicht-leer und nach unten beschränkt, dann existiert eine untere Schranke a von M. Die Menge $M' = \{-a + m + 1 \mid m \in M\}$ ist dann in $\mathbb{N}$ enthalten, denn für alle $m \in M$ gilt $m \geq a$ und somit $-a + m + 1 \geq -a + a + 1 \geq 1$. Als Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt M' ein kleinstes Element b. Wegen $M = \{a + m' - 1 \mid m' \in M'\}$ ist dann und $a + b - 1$ das kleinste Element von M. (Der zweite Teil kann auf ähnliche Weise gelöst werden.)

zu (b) Sei $x \in \mathbb{R}$ vorgegeben und $M_+ = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq x\}$. Die Menge M_+ ist nicht-leer, denn andernfalls wäre $a < x$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ und insbesondere für alle $a \in \mathbb{N}$ erfüllt, im Widerspruch zur Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$. Nach Teil (a) besitzt M_+ ein kleinstes Element a. Es muss $a - 1 < x \leq a$ gelten; die Ungleichung $x \leq a$ wegen $a \in M_+$ und die Ungleichung $a - 1 < x$, da ansonsten auch $a - 1$ noch in M_+ erhalten wäre. Ist nun $|x - a| = a - x \leq \frac{1}{2}$, dann setzen wir $m = a$. Im Fall $a - x > \frac{1}{2}$ setzen wir $m = a - 1$; dann ist $|x - m| = x - m = x - a + 1 < -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ ebenfalls erfüllt.

zu (c) Sei $z = u + iv \in \mathbb{C}$ vorgegeben, mit $u, v \in \mathbb{R}$. Nach Teil (b) existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $|u - a| \leq \frac{1}{2}$ und $|v - b| \leq \frac{1}{2}$. Es folgt dann

$$\begin{aligned} |z - (a + ib)| &= |(u - a) + i(v - b)| \leq \sqrt{(u - a)^2 + (v - b)^2} \leq \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2} \\ &\leq \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$