Lösung Globalübungsblatt 6

Aufgabe 1

Menge der abbrechenden Dezimalbrüche

$$M = \{ c + d \cdot 10^{-r} \mid c, d \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{N},\ 0 \leq d < 10^r \}$$

Bsp.: $12{,}3456 \in M$, da $12{,}3456 = c + d \cdot 10^{-r}$ mit $c = 12$, $r = 4$, $d = 3456$

$-0{,}37 \in M$, da $-0{,}37 = c + d \cdot 10^{-r}$ mit $c = -1$, $r = 2$, $d = 63$

zu (a) Vor.: $]a, b[\cap M \neq \emptyset$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$

Seien nun $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig mit $a < b$. z.zg.: Es gibt ein Element in $]a, b[\cap M$. 1. Fall: $a > 0$ Dann gilt die Aussage nach Voraussetzung.

2. Fall: $a \leq 0$ Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > -a$. Dann gilt $a + k > 0$ und $b + k > a + k$.

Vor.: $\Rightarrow \exists x \in M$ mit $x \in]a+k, b+k[$ $\quad a + k < x < b + k \Rightarrow a < x - k < b$

$\Rightarrow x - k \in]a, b[$ $\quad x \in M \Rightarrow \exists c, d \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ mit $x = c + d \cdot 10^{-r}$ und

$0 \leq d < 10^r \Rightarrow x - k = (c - k) + d \cdot 10^{-r}$, wobei $c - k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - k \in M$

insgesamt: $x - k \in]a, b[\cap M$

zu (b) geg.: $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$, $\varepsilon = b - a$, $r \in \mathbb{N}$ mit $10^{-r} < \varepsilon$

z.zg.: $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $a < k \cdot 10^{-r} < b$

Für bel. $k \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz $a < k \cdot 10^{-r} \Leftrightarrow k > 10^r a$.

Wähle $k \in \mathbb{N}$ minimal mit $k > 10^r a$. Dann ist $a < k \cdot 10^{-r}$ erfüllt.

Minimalität $\Rightarrow k - 1 \leq 10^r a \Rightarrow k \cdot 10^{-r} - 10^{-r} \leq a \Rightarrow$

$k \cdot 10^{-r} \leq a + 10^{-r} < a + \varepsilon = a + (b-a) = b$

insgesamt: $a < k \cdot 10^{-r} < b$

zu (c) Seien $k, r \in \mathbb{N}$. z.zg.: $\exists c, d \in \mathbb{Z}$ mit $k = 10^r c + d$ und $0 \leq d < 10^r$

Für jedes $c \in \mathbb{Z}$ gilt die Äquivalenz $10^r c \leq k \Leftrightarrow c \leq 10^{-r} k$.

Sei $c \in \mathbb{Z}$ maximal mit $c \leq 10^{-r} k$. Dann gilt $10^r c \leq k$.

Sei $d = k - 10^r c$. Dann gilt $k = 10^r c + d$, außerdem $d = k - 10^r c \geq 0$

wegen $k \geq 10^r c$. Maximalität von $c \Rightarrow c + 1 > 10^{-r} k \Rightarrow$

$c + 1 > 10^{-r}(10^r c + d) = c + 10^{-r} d \Rightarrow 10^{-r} d < 1 \Rightarrow d < 10^r$

insgesamt: $k = 10^r c + d$ und $0 \leq d < 10^r$.

zu (d) z.zg.: M dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$

(Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ wird als dicht bezeichnet, wenn jedes nichtleere offene Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Element aus M enthält.)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall. z.zg.: I enthält ein Element von M. Nach evtl. Verkleinerung von I können wir annehmen, dass $I =]a, b[$ für Elemente $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt. Nach Teil (a) reicht es, die Aussage für den Fall $a > 0$ zu zeigen.

Sei $\varepsilon = b - a$. $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet $\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}$ mit $10^{-r} < \varepsilon$

Teil (b) $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ mit $a < k \cdot 10^{-r} < b$

Teil (c) $\Rightarrow$ $\exists\, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $k = 10^r c + d$ und $0 \le d < 10^r$

Sei $x = k \cdot 10^{-r} = (10^r c + d) \cdot 10^{-r} = c + d \cdot 10^{-r}$. $\Rightarrow x \in M$

Außerdem gilt $a < x < b$, also $x \in I$. $\square$

Aufgabe 2

zu (a) Sei $\alpha = -1 + \sqrt{3} \cdot i$. gesucht: α^n für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$\alpha^1 = -1 + \sqrt{3} \cdot i$

$\alpha^2 = (-1 + \sqrt{3} \cdot i)^2 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot \sqrt{3} \cdot i + (\sqrt{3} \cdot i)^2 = 1 - 2\sqrt{3} \cdot i - 3$

$= -2 - 2\sqrt{3}\, i$

$\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha = (-2 - 2\sqrt{3}\, i) \cdot (-1 + \sqrt{3} \cdot i) = 2 + 2\sqrt{3}\, i - 2\sqrt{3} \cdot i - 2\sqrt{3}\, i \cdot \sqrt{3}\, i$

$= 2 + 2 \cdot 3 = 8$

$\alpha^4 = \alpha^3 \cdot \alpha = 8 \cdot (-1 + \sqrt{3}\, i)$ $(k = 1,\ r = 1)$

$\alpha^5 = \alpha^3 \cdot \alpha^2 = 8 \cdot (-2 - 2\sqrt{3}\, i)$ $(k = 1,\ r = 2)$

$\alpha^6 = (\alpha^3)^2 = 8^2$ $(k = 2,\ r = 0)$

$\alpha^7 = (\alpha^3)^2 \cdot \alpha = 8^2 (-1 + \sqrt{3}\, i)$ $(k = 2,\ r = 1)$ ...

$\alpha^{-5} = \alpha^{-6+1} = (\alpha^3)^{-2} \cdot \alpha^1$

$= 8^{-2} \cdot (-1 + \sqrt{3}\, i)$

$= -\frac{1}{64} - \frac{1}{64}\sqrt{3}\, i$

Sei nun $n \in \mathbb{Z}$ vorgeg. Division mit Rest durch 3 liefert $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, 2\}$ mit $n = 3k + r$. $\Rightarrow \alpha^n = \alpha^{3k+r} = (\alpha^3)^k \cdot \alpha^r = 8^k \cdot \alpha^r$

$$\Rightarrow \alpha^n = \begin{cases} 8^k & \text{falls } r = 0 \\ 8^k \cdot (-1 + \sqrt{3}\, i) & \text{falls } r = 1 \\ 8^k (-2 - 2\sqrt{3}\, i) & \text{falls } r = 2 \end{cases}$$

zu (b) (i) gesucht: Lösungen von $z^2 = 1+i$

keine Lösung: $z = \pm\sqrt{1+i}$

Für jedes $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt die Äquivalenz

$$z^2 = 1+i \iff (a+ib)^2 = 1+i \iff a^2 + 2abi + (-b^2) = 1+i$$

$$\iff (a^2 - b^2) + 2abi = 1+i \iff a^2 - b^2 = 1 \wedge 2ab = 1 \underset{\text{wg. } 2ab=1}{\overset{a \neq 0}{\iff}}$$

$$a^2 - b^2 = 1 \wedge b = \frac{1}{2a} \iff a^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = 1 \wedge b = \frac{1}{2a}$$

Bestimme nun die reellen Lösungen von $a^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = 1$.

$$a^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = 1 \iff a^2 - \frac{1}{4}a^{-2} = 1 \iff a^4 - \frac{1}{4} = a^2 \iff$$

$$a^4 - a^2 = \frac{1}{4} \iff a^4 - a^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \iff \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \iff$$

$$\left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0 \iff \left(a^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \iff$$

$$a^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \vee a^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \iff a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vee a^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\overset{a^2 \geq 0}{\iff} a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \iff a \in \left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right\}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow b = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$a = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow b = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

Die beiden komplexen Lösungen von $z^2 = 1+i$ sind also

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{i}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}}\right)$$

zu (b) (ii) gesucht: Lösungsmenge von $z^2 + 6z + 8 = i$

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt die Äquivalenz

$$z^2 + 6z + 8 = i \iff z^2 + 6z + 9 = 1 + i \iff (z+3)^2 = 1 + i$$

s.o.

$$\iff z + 3 \in \left\{ \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{i}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}} \right) \right\}$$

$$\iff z \in \left\{ -3 + \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{i}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}} \right), -3 - \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{i}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}} \right) \right\}$$

Aufgabe 3

zu (a) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Zu zeigen ist die Äquivalenz der Aussagen

(i) Jedes nichtleere offene Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ enthält ein Element aus M.

(ii) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $m \in M$ mit mit $|x - m| < \varepsilon$.

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg. unter Voraussetzung (i):

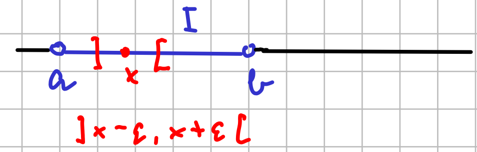
Es gibt ein $m \in M$ mit $|x - m| < \varepsilon$. Das Intervall $I =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ ist offen und nichtleer (i) $\Rightarrow \exists\, m \in M$ mit $m \in I$

$m \in I \Rightarrow x - \varepsilon < m < x + \varepsilon$ $\quad x - \varepsilon < m \Rightarrow x - m < \varepsilon$

$m < x + \varepsilon \Rightarrow x - m > -\varepsilon$ $\quad x - m < \varepsilon,\ x - m > -\varepsilon \Rightarrow |x - m| < \varepsilon$

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall. z.zg. unter Voraussetzung (ii): I enthält ein Element aus M

Nach evtl. Verkleinerung von I kann angenommen werden, dass $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I =]a, b[$ existieren.



Sei $x \in]a, b[$ beliebig gewählt und $\varepsilon = \min\{x-a, b-x\}$.

Beh.: $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq I$

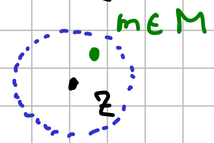
Sei $y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. $y > x-\varepsilon \Rightarrow y > x-(x-a) \Rightarrow y > a$

$y < x+\varepsilon \Rightarrow y < x+(b-x) \Rightarrow y < b$

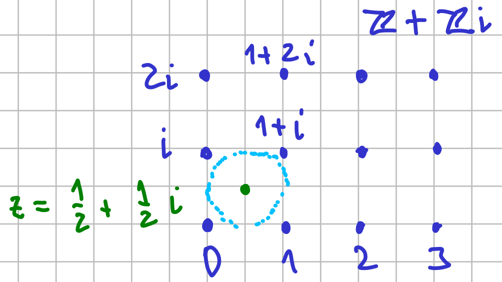
$y > a,\ y < b \Rightarrow y \in I$ ($\Rightarrow$ Beh.)

(ii) $\Rightarrow \exists\, m \in M$ mit $|x-m| < \varepsilon \overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} m \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\overset{\text{Beh.}}{\Rightarrow} m \in I$

zu (b) **Def.:** $M \subseteq \mathbb{C}$ dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$ $:\Leftrightarrow$ Für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $m \in M$ mit $|m-z| < \varepsilon$.



(Der blaue Kreis markiert die Menge aller $w \in \mathbb{C}$ mit $|w-z| < \varepsilon$.)



(Veranschaulichung der Tatsache, dass $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ keine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist: Um den Punkt $z = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ existiert eine ε-Umgebung, die keine Elemente aus $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ enthält.)

Sei $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Beh.: Es gibt kein $m \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ mit $|m-z| < \varepsilon$.

Ang., $m = a+bi$ ist ein solches Element (mit $a, b \in \mathbb{Z}$).

Dann gilt $a \leq 0$ oder $a \geq 1$.

1. Fall: $a \leq 0$ Dann folgt $\frac{1}{2} - a \geq \frac{1}{2}$ und $|m - z| = |(a + bi) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)|$

$= \sqrt{(a-\frac{1}{2})^2 + (b-\frac{1}{2})^2} \geq \sqrt{(a-\frac{1}{2})^2} = |\frac{1}{2} - a| \geq \frac{1}{2}$. $\lightning$ zur Ann. $|m-z| < \frac{1}{2}$

2. Fall: $a \geq 1$ Dann folgt $a - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ und somit

$|m - z| = |(a + bi) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)| = \sqrt{(a-\frac{1}{2})^2 + (b-\frac{1}{2})^2} \geq \sqrt{(a-\frac{1}{2})^2}$

$= |a - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$. $\lightning$ zur Ann. $|m-z| < \frac{1}{2}$

zu (c) Beh.: $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$ ist dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$

Sei $z \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

Laut Vorlesung bilden die rationalen Zahlen eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Teil (a) $\Rightarrow \exists\, r, s \in \mathbb{Q}$ mit $|a - r| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $|b - s| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$\Rightarrow m = r + is$ liegt in $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$, und es gilt

$$|m - z| = |(r - a) + i(s - b)| \leq |r - a| + |s - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert also ein $m \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$

mit $|m - z| < \varepsilon$.

Beh.: $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i)$ ist dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$

Sei $z \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

Laut Vorlesung bilden die irrationalen Zahlen eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Teil (a) $\Rightarrow \exists\, r, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $|a - r| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $|b - s| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$\Rightarrow m = r + is$ liegt in $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i)$, und es gilt

$$|m - z| = |(r - a) + i(s - b)| \leq |r - a| + |s - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert also ein $m \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i)$ mit $|m - z| < \varepsilon$.