

Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 2 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 (Vorbereitung auf das Tutorium)

zu (a) Die fünf Operationen waren Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, kartesisches Produkt und Potenzmengenbildung. (Das kartesische Produkt zweier Mengen A, B ist definiert durch $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A .)

zu (b) Man muss $\varphi(1)$ und $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)$ zeigen. Dabei ist φ ein Aussagenschema mit einem Parameter x , so dass $\varphi(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine sinnvolle Aussage ist.

zu (c) Eine Relation auf einer Menge X ist eine Teilmenge von $X \times X$.

zu (d) Sei $\leq$ eine Relation auf einer Menge X . Damit $\leq$ eine Halbordnung ist, muss sie reflexiv, anti-symmetrisch und transitiv sein. Dabei bedeutet

- *reflexiv*, dass $\forall x \in X : x \leq x$ gilt,
- *anti-symmetrisch*, dass $\forall x, y \in X : (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$ gilt, und
- *transitiv*, dass $\forall x, y, z \in X : (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ gilt.

zu (e) Damit eine Relation R zwischen X und Y eine Abbildung ist, muss für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in R$ existieren.

zu (f) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x+1$ ist injektiv, denn für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ folgt aus $f(a) = f(b)$ jeweils $a+1 = b+1$, und Subtraktion von 1 auf beiden Seiten liefert $a = b$. Sie ist aber nicht surjektiv. Wäre sie surjektiv, dann gäbe es insbesondere ein $a \in \mathbb{R}^+$ mit $a+1 = f(a) = 1$. Durch Subtraktion von 1 auf beiden Seiten würden wir $a = 0$ erhalten, was zu $a \in \mathbb{R}^+$ im Widerspruch steht.

Die Abbildung $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ gegeben durch $g(x) = (x-1)^2$ für $x \neq 1$ und $g(1) = 1$ ist surjektiv, aber nicht injektiv. Zum Nachweis der Surjektivität sei $c \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Setzen wir $a = \sqrt{c} + 1$, dann liegt a in $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, und es gilt $g(a) = (a-1)^2 = (\sqrt{c} + 1 - 1)^2 = (\sqrt{c})^2 = c$. Sie ist aber nicht injektiv, denn beispielsweise gilt $1 \neq 2$, aber $g(1) = 1 = g(2)$.

Die Abbildung $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist ungleich $\text{id}_{\mathbb{R}^+}$ und außerdem bijektiv, weil sie ihre eigene Umkehrabbildung ist. Denn für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt $(h \circ h)(x) = h(h(x)) = h(\frac{1}{x}) = x = \text{id}_{\mathbb{R}^+}(x)$, woraus $h \circ h = \text{id}_{\mathbb{R}^+}$ folgt.

Aufgabe 1

zu (a) *falsch*

Die Menge links enthält genau ein Element, nämlich $\{1, 2\}$. (Diese zweielementige Menge ist tatsächlich als ein Element von $\{\{1, 2\}\}$ anzusehen.) Dagegen enthält die Menge $\{\{1\}, \{2\}\}$ zwei verschiedene Elemente, nämlich $\{1\}$ und $\{2\}$.

zu (b) *falsch*

Betrachten wir die Aussage zum Beispiel für $A = \emptyset$. Dann ist die Menge links gleich der leeren Menge. Andererseits ist die Menge $\{\emptyset\}$ nicht leer, denn sie enthält $\emptyset$ als Element.

zu (c) *falsch*

Sei beispielsweise $A = \{1\}$ und $B = \{2\}$. Dann ist $A \cup B = \{1, 2\}$ und $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Andererseits gilt $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$ und somit $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Die Menge $\mathcal{P}(A \cup B)$ enthält also vier, die Menge $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ nur drei verschiedene Elemente.

zu (d) *wahr*

„ $\Rightarrow$ “ Sei $T \in \mathcal{P}(A)$. Dann gilt $T \subseteq A$ nach Definition der Potenzmenge. Aus $T \subseteq A$ und $A \subseteq B$ folgt $T \subseteq B$. Daraus wiederum folgt $T \in \mathcal{P}(B)$. „ $\Leftarrow$ “ Hier ist nun $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ vorausgesetzt. Wegen $A \in \mathcal{P}(A)$ liegt A auch in $\mathcal{P}(B)$. Aus $A \in \mathcal{P}(B)$ folgt wiederum $A \subseteq B$ nach Definition der Potenzmenge $\mathcal{P}(B)$.

Aufgabe 2

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die ersten n ungeraden Zahlen gegeben durch $1, 3, \dots, 2n - 1$. Wir müssen also $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x)$ mit dem Aussagenschema φ gegeben durch

$$1 + 3 + \dots + (2x - 1) = x^2$$

beweisen. Nach dem Induktionsprinzip genügt es, $\varphi(1)$ und $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x + 1)$ zu beweisen. Die Aussage $\varphi(1)$ lautet $1 = 1^2$, und diese ist offenbar erfüllt. Zum Beweis von $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x + 1)$ sei $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Zu zeigen ist $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)$. Dazu setzen wir $\varphi(n)$, also

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad \text{voraus.}$$

Dies ist unsere Induktionsvoraussetzung. Wir erhalten

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) \stackrel{(*)}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

wobei an der Stelle (*) die Induktionsvoraussetzung angewendet wurde. Also ist $\varphi(n + 1)$ erfüllt und die Implikation $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)$ damit bewiesen.

Aufgabe 3

zu (a) Nach Definition der Halbordnungen müssen wir überprüfen, dass die Relation $\leq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Reflexivität:

Sei $(a, b) \in A \times B$ vorgegeben. Zu zeigen ist $(a, b) \leq (a, b)$. Weil $\leq_A$ als Halbordnung reflexiv ist, gilt $a \leq_A a$. Ebenso gilt $b \leq_B b$, weil $\leq_B$ reflexiv ist. Nach Definition von $\leq$ folgt aus $a \leq_A a$ und $b \leq_B b$ die Relation $(a, b) \leq (a, b)$ wie gewünscht.

Antisymmetrie:

Seien $(a, b), (a', b') \in A \times B$ vorgegeben mit $(a, b) \leq (a', b')$ und $(a', b') \leq (a, b)$. Wegen $(a, b) \leq (a', b')$ gilt $a \leq_A a'$ und $b \leq_B b'$. Aus $(a', b') \leq (a, b)$ folgt ebenso $a' \leq_A a$ und $b' \leq_B b$. Weil $\leq_A$ als Halbordnung antisymmetrisch ist, folgt aus $a \leq_A a'$ und $a' \leq_A a$ die Gleichheit $a = a'$. Ebenso ergibt sich aus der Antisymmetrie von $\leq_B$ und aus $b \leq_B b'$ und $b' \leq_B b$ die Gleichung $b = b'$. Insgesamt gilt also $a = a'$, $b = b'$ und damit $(a, b) = (a', b')$.

Transitivität:

Seien $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in A \times B$ vorgegeben, wobei wir $(a, b) \leq (a', b')$ und $(a', b') \leq (a'', b'')$ voraussetzen. Aus $(a, b) \leq (a', b')$ folgt $a \leq_A a'$ und $b' \leq_B b'$. Aus $(a', b') \leq (a'', b'')$ erhalten wir ebenso $a' \leq_A a''$ und $b' \leq_B b''$. Weil $\leq_A$ transitiv ist, folgt aus $a \leq_A a'$ und $a' \leq_A a''$ die Relation $a \leq_A a''$. Aus der Transitivität von $\leq_B$ sowie $b \leq_B b'$ und $b' \leq_B b''$ ergibt sich entsprechend $b \leq_B b''$. Die beiden Relationen $a \leq_A a''$ und $b \leq_B b''$ wiederum implizieren $(a, b) \leq (a'', b'')$.

zu (b) Sei $x \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass es genau ein $z \in \mathbb{R}$ mit $(x, z) \in h$ gibt. Wir beweisen zuerst die Existenz und dann die Eindeutigkeit von z .

Existenz:

Weil $x \in \mathbb{R}$ und f eine Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist, gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in f$. Weil g ebenfalls eine Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist, existiert auch ein $y' \in \mathbb{R}$ mit $(x, y') \in g$. Definieren wir nun $z = y + y'$, dann gilt $(x, y) \in f$, $(x, y') \in g$ und $z = y + y'$, insgesamt also $(x, z) \in h$ nach Definition von h .

Eindeutigkeit:

Seien $x, z, z' \in \mathbb{R}$ mit $(x, z) \in h$ und $(x, z') \in h$ vorgegeben. Zu zeigen ist $z = z'$. Wegen $(x, z) \in h$ gibt es nach Definition Elemente $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in g$ und $z = y_1 + y_2$. Wegen $(x, z') \in h$ gibt es ebenso Elemente $y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ mit $(x, y_3) \in f$, $(x, y_4) \in g$ und $z' = y_3 + y_4$. Wegen $(x, y_1) \in f$, $(x, y_3) \in f$, und weil f eine Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist, gilt $y_1 = y_3$. Wegen $(x, y_2) \in g$, $(x, y_4) \in g$, und weil g eine Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist, gilt $y_2 = y_4$. Insgesamt gilt damit $z = y_1 + y_2 = y_3 + y_4 = z'$.

zu (c) Nein, die Abbildung h ist im Allgemeinen nicht injektiv. Sei $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = -x$. Laut Vorlesung ist die Abbildung id_X für jede Menge X bijektiv, also ist f insbesondere injektiv. Die Abbildung g ist ebenfalls injektiv. Sind nämlich $a, b \in \mathbb{R}$ mit $g(a) = g(b)$ vorgegeben, dann folgt $-a = -b$ und somit $a = b$. (Man kann auch überprüfen, dass die Abbildung g ihre eigene Umkehrabbildung und damit bijektiv ist, vgl. Aufgabe 0 (f).)

Sei nun $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Teil (b) definiert. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x, x) \in f$ und $(x, -x) \in g$. Es ist dann jeweils $(x, x + (-x)) = (x, 0)$ jeweils in h enthalten, also $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies zeigt, dass h nicht injektiv ist, denn beispielsweise gilt $0 \neq 1$, aber $h(0) = 0 = h(1)$.