Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 2 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Sei A eine Menge. Nach Definition gilt $\varnothing \times A = \{(c,a) \mid c \in \varnothing\ ,\ a \in A\}$. Die Bedingung $c \in \varnothing$ ist nie erfüllt, denn die Menge $\varnothing$ enthält keine Elemente. Erst recht gibt es also keine Paare (c,a) mit $c \ni \varnothing$ und $a \in A$. Die Menge $\varnothing \times A$ ist also leer, d.h. es gilt $\varnothing \times A = \varnothing$. Die Aussage ist also wahr.

zu (b) Auch diese Aussage ist wahr. Für den Beweis seien beliebige Objekte a, b, c, d vorgegeben.
„$\Rightarrow$“ Gilt $a = c$ und $b = d$, dann folgt $\{a, b\} = \{c, d\}$ und damit auch $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$.
„$\Leftarrow$“ Hier setzen wir $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ und unterscheiden die Fälle $a = b$ und $a \neq b$. Im Fall $a = b$ gilt $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$; dementsprechend muss auch die Menge $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ einelementig sein. Es folgt $\{c\} = \{c, d\}$ und somit $c = d$. Aus der ursprünglichen Gleichung erhalten wir $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$, woraus $\{a\} = \{c\}$ und $a = c$ folgen. Mit den bereits bewiesenen Gleichungen $a = b$ und $c = d$ erhalten wir auch $b = d$.

Betrachten wir nun den Fall $a \neq b$. Dann gibt es in $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ eine ein- und eine zweielementige Menge, und wegen $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ muss dasselbe für $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ gelten. Auf Grund dieser Gleichung stimmen auch die einelementigen Mengen überein. Daraus folgen $\{a\} = \{c\}$ und $a = c$. Da auch die zweielementigen Mengen übereinstimmen, gilt $\{a, b\} = \{c, d\}$. Es folgt

$$\{b\} \quad = \quad \{a, b\} \setminus \{a\} \quad = \quad \{c, d\} \setminus \{c\} \quad = \quad \{d\}$$

und damit auch $b = d$.

zu (c) Die Aussage ist wahr.
Beweis der Inklusion „$\subseteq$“: Sei $x \in (A \cup B) \times C$. Dann gibt es Elemente $a \in A \cup B$ und $c \in C$ mit $x = (a, c)$. Aus $a \in A \cup B$ folgt $a \in A$ oder $a \in B$. Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $a \in A$
In diesem Fall liegt $x = (a, c)$ in $A \times C$, also erst recht in $(A \times C) \cup (B \times C)$.

2. Fall: $a \in B$
In diesem Fall liegt $x = (a, c)$ in $B \times C$, also erst recht in $(A \times C) \cup (B \times C)$.

Also ist $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$ in beiden Fällen erfüllt.

Beweis der Inklusion „$\supseteq$“: Sei $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Dann gilt $x \in A \times C$ oder $x \in B \times C$. Wieder unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: $x \in A \times C$
Dann gibt es ein $a \in A$ und ein $c \in C$ mit $x = (a, c)$. Aus $a \in A$ folgt $a \in A \cup B$.
Also liegt x in $(A \cup B) \times C$.

2. Fall: $x \in B \times C$
Dann gibt es ein $b \in B$ und ein $c \in C$ mit $x = (b, c)$. Aus $b \in B$ folgt $b \in A \cup B$. Also liegt x in $(A \cup B) \times C$.

In beiden Fällen ist also $x \in (A \cup B) \times C$ erfüllt.

zu (d) Die Aussage ist wahr.
„$\subseteq$" Sei $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Dann gilt $C \subseteq A \cap B$ nach Definition der Potenzmenge. Wegen $A \cap B \subseteq A$ folgt daraus $C \subseteq A$ und somit $C \in \mathcal{P}(A)$. Wegen $A \cap B \subseteq B$ erhält man ebenso $C \subseteq B$ und $C \in \mathcal{P}(B)$. Aus $C \in \mathcal{P}(A)$ und $C \in \mathcal{P}(B)$ folgt wiederum $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

„$\supseteq$" Sei $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dann gilt $C \in \mathcal{P}(A)$ und $C \in \mathcal{P}(B)$. Es folgt $C \subseteq A$ und $C \subseteq B$ nach Definition der Potenzmenge. Daraus wiederum folgt $C \subseteq A \cap B$ und somit $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

Hinweis:
Wenn man unsicher ist, ob die Implikation „$(C \subseteq A) \wedge (C \subseteq B) \Rightarrow (C \subseteq A \cap B)$" allgemein gilt, kann man dies auch kurz beweisen. Seien A, B, C Mengen, für die $C \subseteq A$ und $C \subseteq B$ gilt. Sei $x \in C$. Dann Wegen $C \subseteq A$ liegt x dann auch in A, und wegen $C \subseteq B$ liegt x auch in B. Aus $x \in A$ und $x \in B$ folgt $x \in A \cap B$. Damit ist $C \subseteq A \cap B$ bewiesen.

zu (e) Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch.
Als Gegebenbeispiel betrachten wir die Mengen $A = B = \{1\}$. Es gilt $A \times B = \{(1,1)\}$ und $\mathcal{P}(A \times B) = \{\varnothing, \{(1,1)\}\}$. Andererseits gilt $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{1\}\}$, also

$$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \quad = \quad \{(\varnothing, \varnothing), (\varnothing, \{1\}), (\{1\}, \varnothing), (\{1\}, \{1\})\}.$$

Die Menge $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ enthält also vier verschiedene Elemente, die Menge $\mathcal{P}(A \times B)$ nur zwei. Dies zeigt, dass die Mengen nicht gleich sind.

Aufgabe 2

zu (a) Wir betrachten das Aussagenschema φ mit dem Parameter x gegeben durch die Gleichung $1^2 + 2^2 + ... + x^2 = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$. Nach dem Induktionsprinzip folgt $\forall\, x \in \mathbb{N} : \varphi(x)$ aus den beiden Aussagen $\varphi(1)$ und $\forall\, x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \to \varphi(x+1)$.

Die Aussage $\varphi(1)$ ist die Gleichung $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)$. Wegen $1^2 = 1$ und $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$ ist diese Aussage erfüllt.

Zum Beweis von $\forall\, x \in \mathbb{N} : \varphi(x) \to \varphi(x+1)$ sei $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Zu zeigen ist $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$. Setzen wir dafür $\varphi(n)$ voraus, es gelte also

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 \quad = \quad \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \qquad (*)$$

Zu zeigen ist $\varphi(n+1)$, dies ist die Gleichung

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 \quad = \quad \tfrac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1). \qquad (**)$$

Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung (*) erhalten wir für die linke Seite von (**) den Ausdruck

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 \quad \overset{(*)}{=} \quad \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \quad = \quad \left(\tfrac{1}{6}n(2n+1) + n + 1\right)(n+1) \quad =$$

$$\left(\tfrac{1}{3}n^2 + \tfrac{1}{6}n + n + 1\right)(n+1) \quad = \quad (\tfrac{1}{3}n^2 + \tfrac{7}{6}n + 1)(n+1).$$

Die rechten Seite von (**) ist gleich

$$\tfrac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) \quad = \quad \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \quad =$$

$$\tfrac{1}{6}(n+1)(2n^2+4n+3n+6) \quad = \quad \tfrac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) \quad = \quad (\tfrac{1}{3}n^2+\tfrac{7}{6}n+1)(n+1).$$

Linke und rechte Seite von (**) stimmen überein, also ist $\varphi(n+1)$ erfüllt.

zu (b) Nehmen wir an, A ist eine nichtleere Menge, die *kein* kleinstes Element enthält. Wir betrachten das Aussagenschema φ mit dem Parameter x gegeben durch $A \cap \{1, 2, ..., x\}$ und beweisen $\forall x \in \mathbb{N} : A \cap \{1, 2, ..., x\} = \varnothing$ durch vollständige Induktion. Die Aussage $\varphi(1)$ ist gegeben durch $A \cap \{1\} = \varnothing$. Sie ist erfüllt, denn aus $A \cap \{1\} \neq \varnothing$ würde $1 \in A$ folgen. Wegen $A \subseteq \mathbb{N}$ wäre 1 dann das kleinste Element von A, im Widerspruch zur Annahme.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$, und setzen wir $\varphi(n)$ voraus. Demnach gilt $A \cap \{1, ..., n\} = \varnothing$. Zu zeigen ist nun $\varphi(n+1) \cap \{1, ..., n, n+1\} = \varnothing$. Nehmen wir an, dass der Durchschnitt nicht leer ist, also ein $k \in A$ mit $1 \leq k \leq n+1$ existiert. Wegen $A \cap \{1, ..., n\} = \varnothing$ muss dann $k = n+1$ sein. Es gilt also $n+1 \in A$. Zugleich folgt aus $A \cap \{1, ..., n\} = \varnothing$, dass $n+1$ das kleinste Element in A ist, was erneut einen Widerspruch zu unserer Annahme bedeutet. Also muss $A \cap \{1, ..., n, n+1\} = \varnothing$ gelten, d.h. $\varphi(n+1)$ ist erfüllt.

Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen. Es gilt also $A \cap \{1, ..., n\} = \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits ist A nichtleer. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$, das zugleich in A liegt. Aber dies steht zu $A \cap \{1, ..., n\} = \varnothing$ im Widerspruch. Also war bereits die Annahme ganz zu Beginn falsch: Jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ muss ein kleinstes Element enthalten.

Aufgabe 3

zu (a) Auf Grund der Injektivität gilt $f(0) \neq f(1)$, also $f(0) < f(1)$ oder $f(0) > f(1)$. Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < 1$ und $f(a) > f(0)$, $f(a) > f(1)$, dann sind wir fertig. Dasselbe gilt, wenn die Bedingungen $0 < a < 1$ und $f(a) < f(0)$, $f(a) < f(1)$ erfüllt sind. Deshalb können wir von nun an davon ausgehen, dass der Wert $f(a)$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < 1$ jeweils zwischen $f(0)$ und $f(1)$ liegt.

Betrachten wir zunächst den Fall $f(0) < f(1)$. Ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b < 1$ jeweils $f(0) < f(a) < f(b) < f(1)$, so ist f streng monoton wachsend, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es muss also $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b < 1$, $f(0) < f(a), f(b) < f(1)$ und $f(a) \geq f(b)$ geben. Der Fall $f(a) = f(b)$ ist auf Grund der Injektivität von f ausgeschlossen. Es gilt also $f(a) > f(b)$. Insgesamt gilt damit $0 < a < b$ und $f(a) > f(0)$, $f(a) > f(b)$.

Betrachten wir nun den Fall $f(0) > f(1)$. Ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b < 1$ jeweils $f(0) > f(a) > f(b) > f(1)$, so ist f streng monoton fallend, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es muss also $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b < 1$, $f(0) > f(a), f(b) > f(1)$ und $f(a) \leq f(b)$ geben. Der Fall $f(a) = f(b)$ ist auf Grund der Injektivität von f ausgeschlossen. Es gilt also $f(a) < f(b)$. Insgesamt gilt damit $a < b < 1$ und $f(b) > f(a)$, $f(b) > f(1)$.

zu (b) Nehmen wir an, dass $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, aber weder streng monoton wachsend noch streng monoton fallend ist. Dann gibt es nach Teil (a) Punkte $a, b, c \in [0, 1]$ mit $f(b) > f(a), f(c)$ oder $f(b) < f(a), f(c)$ sowie $a < b < c$. Betrachten wir zunächst den Fall $f(b) > f(a), f(c)$, und nehmen wir an, dass außerdem $f(a) > f(c)$ gilt. Dann liegt $f(a)$ zwischen den Werten $f(b)$ und $f(c)$, und nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $b < x < c$ und $f(x) = f(a)$. Wegen $a < b < x$ ist außerdem

$x \neq a$; aber $x \neq a$ und $f(x) = f(a)$ stehen im Widerspruch zur Injektivität von f. Gilt statt dessen $f(a) < f(c)$, dann liegt $f(c)$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Es gibt somit nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$ und $f(x) = f(c)$. Wegen $x < b < c$ ist außerdem $x \neq c$; wir erhalten also erneut einen Widerspruch zur Injektivität. Die letzte Möglichkeit, $f(a) = f(c)$, ist auf Grund der Injektivität von f ebenfalls ausgeschlossen.

Den Fall $f(b) < f(a), f(c)$ behandelt man weitgehend analog. Wieder ist $f(a) < f(c)$ oder $f(a) > f(c)$ möglich. Im Fall $f(a) < f(c)$ liegt $f(a)$ zwischen $f(b)$ und $f(c)$, es gibt also ein $x \in \mathbb{R}$ mit $b < x < c$ und $f(x) = f(a)$. Wegen $a < b < x$ ist $x \neq a$, so dass wir auch hier einen Widerspruch zur Injektivität von f erhalten. Im Fall $f(a) > f(c)$ liegt $f(c)$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$, es gibt also ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$ und $f(x) = f(c)$. Wegen $x < b < c$ ist $x \neq c$, was wiederum der Injektivität von f widerspricht. Unsere Annahme von oben führt also in jedem Fall zu einem Widerspruch. Daraus folgt, dass jede stetige und injektive Funktion entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend sein muss.