Analysis einer Variablen

— Blatt 1 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Gesucht waren die Elemente der Menge

$$T = \{A \in M \mid A \cap \{1,2\} = \varnothing \vee \{1,2,3,4\} \setminus A \supseteq \{3\}\}.$$

Zunächst bestimmen wir alle Mengen $A \in M$ mit $A \cap \{1,2\} = \varnothing$. Die Bedingung $A \cap \{1,2\} = \varnothing$ ist gleichbedeutend mit $A \subseteq \{3,4\}$ auf Grund der Äquivalenz

$$A \cap \{1,2\} = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad (1 \notin A) \wedge (2 \notin A) \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq M \setminus \{1,2\} \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq \{3,4\}.$$

Wir brauchen also nur die Teilmengen von $\{3,4\}$ aufzuzählen, dies sind $\varnothing$, $\{3\}$, $\{4\}$ und $\{3,4\}$.

Nun bestimmen wir noch die Mengen A mit $\{1,2,3,4\} \setminus A \supseteq \{3\}$. Hier gilt die Äquivalenz

$$\{1,2,3,4\} \setminus A \supseteq \{3\} \quad \Leftrightarrow \quad 3 \notin A \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq \{1,2,3,4\} \setminus \{3\} \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq \{1,2,4\}.$$

Die Bedingung trifft also auf alle Teilmengen von $\{1,2,4\}$ zu, dies sind $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$ und $\{1,2,4\}$.

Die Mengen A, welche die erste *oder* die zweite Bedingung erfüllen, sind also gegeben durch

$$\varnothing\ ,\ \{1\}\ ,\ \{2\}\ ,\ \{3\}\ ,\ \{4\}\ ,$$

$$\{1,2\}\ ,\ \{1,4\}\ ,\ \{2,4\}\ ,\ \{3,4\}\ ,\ \{1,2,4\}.$$

zu (b) Setzt man beispielsweise $A = \{1,2,3\}$, $B = M$ und $C = \{1,2\}$, dann gilt $A \subsetneq B$ und $B \supseteq C$. Die Prämisse der Implikation $(A \subsetneq B) \wedge (B \supseteq C)$ ist also wahr. Andererseits ist die Konklusion $C \supseteq A$ nicht erfüllt. Also ist die Implikation für diese Elemente $A, B, C \in M$ insgesamt falsch.

zu (c) Wir setzen $A = \{1,2,3\}$ und $B = C = M$. Wie bereits festgestellt, gilt $A \subsetneq B$, und auch $B \supseteq C$ ist wegen $B = C$ erfüllt. Außerdem gilt diesmal $C \supseteq A$. Also sind Prämisse und Konklusion diesmal beide erfüllt. Die Implikation ist damit wahr.

Aufgabe 2

Zunächst identifizieren wir die Teilaussagen, aus denen α_2 und α_3 zusammengesetzt sind. Wir finden

$$\varphi_1 \quad = \quad \text{„}U \text{ ist offen.“}$$

$$\varphi_2 \quad = \quad \text{„}U \text{ ist abgeschlossen.“}$$

$$\varphi_3 \quad = \quad \text{„}X \text{ ist zusammenhängend.“}$$

Die beiden Sätze α_2 und α_3 sind folgendermaßen aus $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ zusammengesetzt.

$$\alpha_2 \quad = \quad \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Rightarrow \neg\varphi_3 \qquad , \qquad \alpha_3 \quad = \quad \varphi_3 \wedge \varphi_1 \Rightarrow \neg\varphi_2$$

Wir können nun die Implikation $\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3$ mit einer Wahrheitstabelle überprüfen.

φ_1	φ_2	φ_3	$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	$\varphi_3 \wedge \varphi_1$	α_2	α_3	$\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3$
w	w	w	w	w	f	f	w
w	w	f	w	f	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	w	w
f	w	w	f	f	w	w	w
f	w	f	f	f	w	w	w
f	f	w	f	f	w	w	w
f	f	f	f	f	w	w	w

Zu beachten ist, dass die Aussage „U ist offen“ *nicht* gleichbedeutend mit der Negation der Aussage „U ist abgeschlossen“ ist. Es gibt in der Topologie Mengen, die zugleich offen und abgeschlossen sind, und ebenso gibt es Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind.

Aufgabe 3

Zunächst beweisen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Äquivalenz $x^2 - 10x + 21 = 0 \Leftrightarrow x \in \{3, 7\}$.

$$X^2 - 10x + 21 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 25 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-5)^2 = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-5)^2 - 2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad ((x-5)-2)((x-5)+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-7)(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-7=0) \vee (x-3=0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x=7) \vee (x=3) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{3,7\}$$

Nun beweisen wir die Mengengleichung. Wir bezeichnen die Menge auf der linken Seiten mit M und die Menge auf der rechten Seite mit N.

„$M \subseteq N$“ Sei $p \in M$. Dann ist $p = (x, y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $(x^2 - 10x + 21)(y - 2) = 0$. Es folgt $x^2 - 10x + 21 = 0$ oder $y - 2 = 0$. Betrachten wir zunächst den Fall, dass $x^2 - 10x + 21 = 0$ gilt. Wie oben gezeigt, folgt dann $x \in \{3, 7\}$. Ist $x = 3$, dann gilt $p = (3, y)$. Also liegt p in der Menge $\{(3, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ und damit insbesondere in N. Ist $x = 7$, dann folgt $p \in \{(7, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ und damit ebenfalls $p \in N$. Nun betrachten wir noch den Fall, dass $y - 2 = 0$ ist. Dann gilt $y = 2$, also $p = (x, 2)$, somit $p \in \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$, also auch hier $p \in N$.

„$N \subseteq M$“ Sei $p \in N$. Dann gilt $p = (x, 2)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ oder $p = (3, y)$ für ein $y \in \mathbb{R}$ oder $p = (7, y)$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Im ersten Fall liegt p wegen $(x^2 - 10x + 21)(2 - 2) = (x^2 - 10x + 21) \cdot 0 = 0$ in der Menge M. Im zweiten Fall ist p wegen $(3^2 - 10 \cdot 3 + 21)(y - 2) = 0 \cdot (y - 2) = 0$ ebenfalls in M enthalten. Im dritten Fall gilt wegen $(7^2 - 10 \cdot 7 + 21) \cdot (y - 2) = 0 \cdot (y - 2) = 0$ ebenfalls $p \in M$.