

Analysis einer Variablen

— Blatt 12 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige streng monoton wachsende oder fallende Funktion, $g : f(I) \rightarrow I$ die Umkehrfunktion, $a \in I$ ein Punkt, in dem f differenzierbar ist und $f'(a) \neq 0$ gilt, und $b = f(a)$, dann gilt $g'(b) = f'(a)^{-1} = f'(g(b))^{-1}$. Berechnet wurden damit die Ableitung der k -ten Wurzelfunktion $\sqrt[k]{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ und der Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

zu (b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in D$ wird globales Maximum einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ genannt, wenn $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ gilt. Von einem lokalen Maximum spricht man, wenn ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \varepsilon$ erfüllt ist.

zu (c) Die Sinusfunktion nimmt nur die Werte -1 und 1 an, dazwischen ist sie streng monoton wachsend oder fallend. Daraus folgt, dass die Stellen, an denen der Wert 1 angenommen wird, genau die globalen und zugleich auch die lokalen Maxima der Funktion sind. Die Menge dieser Stellen ist gegeben durch $\{\pi(2k + \frac{1}{2}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

zu (d) Ein notwendiges Kriterium muss an einer Extremstelle erfüllt sein. Dass das Kriterium an einer Stelle erfüllt ist, bedeutet aber umgekehrt nicht, dass dort ein Extremum vorliegen muss. Ist dagegen ein hinreichendes Kriterium an einer Stelle erfüllt, dann befindet sich dort mit Sicherheit auch ein Extremum. Umgekehrt ist durch das Vorliegen eines Extremums aber nicht gewährleistet, dass das hinreichende Kriterium dort erfüllt ist.

zu (e) Die Bedingung $f'(a) = 0$ ist auf jeden Fall erfüllt, denn dies ist ein notwendiges Kriterium für Extrema. Die Bedingung $f''(a) < 0$ braucht aber nicht unbedingt erfüllt sein. Beispielsweise besitzt die Funktion $f(x) = -x^4$ bei $a = 0$ ein lokales Maximum, die Ableitung $f'(x) = 4x^3$ ist dort aber gleich 0 .

Aufgabe 1 zu (a) Die Ableitung der Tangensfunktion erhalten wir mit der Quotientenregel.

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos} \right)'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

zu (b) Nach Definition ist $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ die Umkehrabbildung von $\sin : [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \rightarrow [-1, 1]$. Durch Einschränkung erhält man die zueinander inversen Abbildungen $\sin :]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[\rightarrow]-1, 1[$ und $\arcsin :]-1, 1[\rightarrow]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$. Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Kosinusfunktion, für jedes $y \in]-1, 1[$ gilt laut Umkehrregel also $\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}$. Wegen $z = \arcsin(y) \in]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ ist der Wert $\cos(z)$ der Kosinusfunktion positiv, es gilt also $\cos(z) = \sqrt{1 - \sin(z)^2}$. Insgesamt erhalten wir

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

zu (c) Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$ bestimmen wir mit der Kettenregel. Die innere Funktion $u(x) = x \ln(x)$ hat die Ableitung $u'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$. Damit erhalten wir

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)e^{x \ln(x)} = (\ln(x) + 1)x^x.$$

Aufgabe 2

zu (a) Die Ableitung von f ist gegeben durch $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$. Mit der p - q -Formel findet man die beiden Nullstellen 1 und 2, es gilt also $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$. Auf Grund des notwendigen Kriteriums sind 1 und 2 die einzigen möglichen lokalen Extrema im offenen Intervall $]0, \frac{5}{2}[$. Die zweite Ableitung $f''(x) = 12x - 18$ hat in den Stellen die Werte $f''(1) = -6 < 0$ und $f''(2) = 6 > 0$. Aus dem hinreichenden Kriterium folgt, dass bei f im Punkt 1 ein lokales Maximum und im Punkt 2 ein lokales Minimum besitzt. Dabei ist $f(1) = 10$ und $f(2) = 9$.

Nun untersuchen wir noch die Endpunkte des Intervalls. Es ist $f(0) = 5$ und $f(\frac{5}{2}) = 10$. Für $0 < x < 1$ ist $x-1 < 0$ und $x-2 < 0$, also $f'(x) > 0$. Daraus folgt, dass die Funktion $f|_{[0,1]}$ streng monoton wachsend ist. Für alle $x \in]0, 1[$ gilt also $f(0) < f(x) < f(1)$, also $5 < f(x) < 10$. Für $1 < x < 2$ ist $x-1 > 0$ und $x-2 < 0$, also $f'(x) < 0$. Die Funktion $f|_{[1,2]}$ ist also streng monoton fallend. Es folgt $f(1) > f(x) > f(2)$, also $10 > f(x) > 9$ für alle $x \in]1, 2[$. Für $2 < x < \frac{5}{2}$ gilt $x-1 > 0$ und $x-2 > 0$, also $f'(x) > 0$. Die Funktion $f|_{[2, \frac{5}{2}]}$ ist also streng monoton wachsend. Es folgt $f(2) < f(x) < f(\frac{5}{2})$, also $9 < f(x) < 10$ für alle $x \in]2, \frac{5}{2}[$.

Insgesamt ergibt unsere Untersuchung, dass es im Definitionsbereich keine Stellen mit Funktionswert kleiner als 5 gibt. Daraus folgt, dass 0 mit dem Funktionswert $f(0) = 5$ ein globales Minimum der Funktion ist. Ebenso gibt es im Definitionsbereich keine Stellen mit Funktionswert größer als 10. Daraus folgt, dass $\frac{5}{2}$ mit $f(\frac{5}{2}) = 10$ ein globales Maximum von f ist. Die Untersuchung des Wertebereichs von f ergibt auch, dass die Stelle 1 ein globales Maximum, die Stelle 2 aber kein globales Minimum ist. Insgesamt sind die lokalen Extrema der Funktion also 0, 1, 2 und $\frac{5}{2}$, aber nur 0, 1 und $\frac{5}{2}$ sind globale Extrema.

zu (b) Sei $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Bereits in Teil (a) haben wir bemerkt, dass $f|_{[0, x_1]}$ streng monoton wachsend, $f|_{[x_1, x_2]}$ streng monoton fallend und $f|_{[x_2, \frac{5}{2}]}$ streng monoton wachsend ist.

Aufgabe 3

zu (a) Nach Satz (11.13) gibt es für die Umgebung $V =]-1, 1[$ von 0 eine Umgebung U_1 von $-\infty$ mit $f(U_1) \subseteq V$. Ebenso gibt es eine Umgebung U_2 von $+\infty$ mit $f(U_2) \subseteq V$. Auf Grund der Umgebungseigenschaft gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $] -\infty, c_1[\subseteq U_1$ und $] c_2, +\infty[\subseteq U_2$. Setzen wir $c = \max\{c_1, c_2\}$, dann gilt $] -\infty, -c[\subseteq U_1$ und $] c, +\infty[\subseteq U_2$. Es folgt $f(]-\infty, -c[\cup]c, +\infty[) \subseteq V$, also $f(x) \in]-1, 1[$ und insbesondere $f(x) < 1$ für alle x außerhalb von $[-c, c]$.

zu (b) Auf Grund des Maximumsprinzips nimmt die Funktion $f|_{[-c, c]}$ in einem Punkt $p \in [-c, c]$ ihr lokales Maximum an. Wegen $0 \in [-c, c]$ und $f(0) = 1$ gilt $f(p) \geq 1$. Für alle $x \in [-c, c]$ gilt somit $f(p) \geq f(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$ außerhalb $[-c, c]$ aber auch $f(p) \geq 1 > f(x)$. Dies zeigt, dass p ein globales Maximum von f ist, insbesondere auch ein lokales Maximum. Weil insgesamt nur ein lokales Maximum existiert, muss $p = 0$ gelten. Also liegt im Punkt 0 ein globales Maximum vor.