Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 10 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Der Zwischenwertsatz lautet: Ist $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall, $d \in \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < d$ und $f(b) > d$, dann gibt es ein $c \in \,]a,b[$ mit $f(c) = d$. Jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird also von $f|_{]a,b[}$ angenommen. Das Maximumsprinzip besagt, dass jede stetige Funktion auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall beschränkt ist und ihr Minimum und Maximum annimmt.

zu (b) Es gilt $f(\mathbb{R}) \supseteq f([0,3]) \supseteq [-2,2]$, denn neben $f(0) = -2$ und $f(3) = 2$ wird auch jeder Wert zwischen -2 und 2 durch $f|_{[0,3]}$ angenommen.

zu (c) Nein. Dass der Wertebereich von $f|_{[0,5]}$ nach oben unbeschränkt ist, widerspricht dem Maximumsprinzip.

zu (d) Es handelt sich um die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

zu (e) Ist der Konvergenzradius ρ gleich 0, dann gilt $D_{\text{conv}} = \{a\}$. Ist $\rho \in \mathbb{R}^+$, dann gilt $]a-\rho, a+\rho[\,\subseteq D_{\text{conv}} \subseteq [a-\rho, a+\rho]$, wobei a den Entwicklungspunkt der Potenzreihe bezeichnet. Ist $\rho = +\infty$, dann gilt $D_{\text{conv}} = \mathbb{R}$.

zu (f) Nein. Grundsätzlich ist D_{conv} nur dann nicht einelementig oder gleich $\mathbb{R}$, wenn der Konvergenzradius ρ ein endlicher positiver Wert ist. In diesem Fall ist D_{conv} ein (offenes, halboffenes oder abgeschlossenes) Intervall, wie unter (e) wiederholt wurde. Die Menge $D = [0,1] \cup [2,3]$ ist aber kein Intervall, denn es gilt $1, 2 \in D$, $1 < \frac{3}{2} < 2$, aber $\frac{3}{2} \notin D$.

Aufgabe 1

Es gilt $f(-1) = 4 > 0$ und $f(0) = -1 < 0$. Als Polynomfunktion ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, damit auch die eingeschränkte Abbildung $f|_{[-1,0]}$. (Denn wenn die Implikation $\lim_n x_n = x \Rightarrow \lim_n f(x_n) = f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gültig ist, dann erst recht für jedes $x \in [-1,0]$ und jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[-1,0]$.) Auf Grund des Zwischenwertsatzes gibt es somit ein $a \in \,]-1,0[$ mit $f(a) = 0$. Ebenso folgt aus $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 1 > 0$ und der Stetigkeit von $f|_{[0,2]}$, dass ein $b \in \,]0,2[$ mit $f(b) = 0$ existiert.

zu (b) Die Funktion f kann in der Form $f(x) = 2x^2(1 - \frac{3}{2}x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2})$ dargestellt werden. Der Term $\frac{3}{2}x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2}$ kann für $|x| > 4$ betragsmäßig durch $\frac{3}{8} + \frac{1}{32} = \frac{13}{32} < \frac{1}{2}$ abgeschätzt werden. Damit gilt $1 - \frac{1}{3}x^{-1} - x^{-2} > \frac{1}{2}$ und $f(x) > 2 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 4$ für alle $|x| > 4$.

Nach dem Maximumsprinzip nimmt die Funktion $f|_{[-4,4]}$ in einem Punkt $a \in [-4,4]$ ihr Minimum an, und wegen $f(0) = -1$ muss $c = f(a) \le -1$ gelten. Sei nun $d \in f(\mathbb{R})$ beliebig vorgegegeben. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = d$. Im Fall $x \notin [-4,4]$ gilt $f(x) > 4 \ge -1 \ge c$. Im Fall $x \in [-4,4]$ gilt ebenfalls $f(x) \ge c$, weil c der minimale Wert von $f|_{[-4,4]}$ ist. Also gilt $d \ge c$ für alle $d \in f(\mathbb{R})$. Zusammen mit $c \in f(\mathbb{R})$ folgt $c = \min f(\mathbb{R})$.

zu (c) Weil c das Minimum von $f(\mathbb{R})$ ist, muss $f(\mathbb{R}) \subseteq [c, +\infty[$ gelten. Sei nun umgekehrt $d \in [c, +\infty[$

vorgegeben. Für $d \in f(\mathbb{R})$ müssen wir nachweisen, dass ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = d$ existiert. Im Fall $d = c$ können wir einfach $x = a$ setzen, wobei a den in Teil (b) gefundenen Punkt bezeichnet. Gehen wir nun von $d > c$ aus. Weil f eine Polynomfunktion geraden Grades ist, gilt laut Vorlesung $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Betrachten wir die Folge gegeben durch $x_n = n$, so folgt daraus insbesondere, dass ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$ und $f(n) > d$ existiert. Wenden wir nun den Zwischenwertsatz auf die Funktion $f|_{[a,n]}$ an. Diese Funktion ist stetig, und es gilt $f(a) = c < d$ sowie $f(n) > d$. Also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [a, n]$ mit $f(x) = d$.

Aufgabe 2

zu (a) „$\Rightarrow$“ Zum Beweis der ersten Gleichung sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $]a, b[$ mit $\lim_n x_n = a$. Zu zeigen ist $\lim_n f(x_n) = +\infty$. Sei dazu $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Weil f surjektiv ist, gibt es ein $c \in\ ]a, b[$ mit $f(c) = \kappa + 1$. Wegen $\lim_n x_n = a$ gibt es für $\varepsilon = c - a$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Es folgt $x_n < a + \varepsilon = a + (c - a) = c$ für alle $n \geq N$. Weil f monoton fallend ist, folgt daraus wiederum $f(x_n) \geq f(c) = \kappa + 1 > \kappa$ für alle $n \geq N$. Damit ist $\lim_n f(x_n) = +\infty$ nachgewiesen.

Zum Beweis der zweiten Gleichung sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $]a, b[$ mit $\lim_n x_n = b$. Zu zeigen ist $\lim_n f(x_n) = -\infty$. Sei dazu $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Weil f surjektiv ist, gibt es ein $c \in\ ]a, b[$ mit $f(c) = -\kappa - 1$. Wegen $\lim_n x_n = b$ gibt es für $\varepsilon = b - c$ ein $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Es folgt $x_n > b - \varepsilon = b - (b - c) = c$ für alle $n \geq N$. Weil f monoton fallend ist, folgt daraus wiederum $f(x_n) \leq f(c) = -\kappa - 1 < -\kappa$ für alle $n \geq N$. Damit ist $\lim_n f(x_n) = -\infty$ nachgewiesen.

„$\Leftarrow$“ Sei $d \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Für den Nachweis der Surjektivität von f müssen wir zeigen, dass ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(c) = d$ existiert. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $]a, b[$ mit $\lim_n x_n = a$ und $\lim_n y_n = b$. Wegen

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to b} f(x) = -\infty$$

gilt dann $\lim_n f(x_n) = +\infty$ und $\lim_n f(y_n) = -\infty$. Insbesondere gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f(x_N) > d$ und $f(y_N) < d$. Nach eventueller Vertauschung von x_N und y_N können wir außerdem $x_N < y_N$ annehmen. Da f auf $]a, b[$, insbesondere auf dem abgeschlossenen Intervall $[x_N, y_N]$ stetig ist und $f(x_N) > d > f(y_N)$ gilt, können wir den Zwischenwertsatz anwenden und erhalten ein $c \in\ ]x_N, y_N[$ mit $f(c) = d$.

Aufgabe 3

zu (a) Für vorgegebenes $p \in \mathbb{N}$ zerlegen wir die Exponentialreihe in $\exp(x) = s_{p+1}(x) + r_{p+1}(x)$ mit $s_{p+1}(x) = \sum_{k=0}^{p+1} \frac{x^k}{k!}$ und $r_{p+1}(x) = \sum_{k=p+2}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt offenbar $r_{p+1}(x) \geq 0$, außerdem ist

$$\frac{s_{p+1}(x)}{x^p} \quad = \quad \sum_{k=0}^{p-1} \tfrac{1}{k!} x^{k-p} + \tfrac{1}{p!} + \tfrac{1}{(p+1)!} x.$$

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x_n = +\infty$. Zu zeigen ist $\lim_n \frac{\exp(x_n)}{x_n^p} = +\infty$. Sei dazu $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $N \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass $x_n > (p + 1)!\kappa$ für alle $n \geq N$ gilt. Dann folgt

$$\frac{\exp(x_n)}{x_n^p} \quad = \quad \frac{s_{p+1}(x_n)}{x_n^p} + \frac{r_{p+1}(x_n)}{x_n^p} \quad \geq \quad \sum_{k=0}^{p-1} \tfrac{1}{k!} x_n^{k-p} + \tfrac{1}{p!} + \tfrac{1}{(p+1)!} x_n \quad \geq \quad \tfrac{1}{p!} + \tfrac{1}{(p+1)!} x_n \quad > \quad \kappa + \tfrac{1}{p!} \quad > \quad \kappa$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Für den Nachweis des zweiten Grenzwerts sei wiederum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x_n = +\infty$. Nach Änderung der Folge an höchstens endlich vielen Stellen (die sich auf das Konvergenzverhalten nicht auswirken) können wir $x_n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Zu zeigen ist $\lim_n \frac{\ln(x_n)}{\sqrt[p]{x_n}} = 0$. Setzen wir $y_n = \ln(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann sind wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{p}y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_n y_n = +\infty$ und $\lim_n \frac{1}{p}y_n = +\infty$. Nun gilt

$$\frac{\ln(x_n)}{\sqrt[p]{x_n}} \quad = \quad \frac{y_n}{\sqrt[p]{\exp(y_n)}} \quad = \quad \frac{y_n}{e^{y_n/p}} \quad = \quad p \cdot \frac{\frac{y_n}{p}}{e^{y_n/p}}.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ und $\lim_n \frac{1}{p}y_n = +\infty$ gilt $\lim_n \frac{e^{y_n/p}}{y_n/p} = +\infty$, also $\lim_n \frac{y_n/p}{e^{y_n/p}} = 0$ und somit $\lim_n \frac{\ln(x_n)}{\sqrt[p]{x_n}} = \lim_n p \cdot \frac{y_n/p}{e^{y_n/p}} = 0$.

zu (b) Wir wenden den Satz (12.7) von Cauchy-Hadamard auf die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ mit den Koeffizienten $a_n = n^{\ln(n)/n}$ an. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^{\ln(n)/n}} = n^{\ln(n)/n^2} = \exp(\ln(n)^2/n^2)$. Nach Teil (a) ist $\lim_n \frac{\ln(n)}{n} = 0$, also auch $\lim_n \frac{\ln(n)^2}{n^2} = 0$. Setzen wir $x_n = \frac{\ln(n)^2}{n^2}$, dann liefert die Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \exp(\ln(n)^2/n^2) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \exp(x_n) \quad = \quad \exp(0) \quad = \quad 1.$$

Nach Satz (12.7) ist der Konvergenzradius ρ also durch $\rho = 1^{-1} = 1$ gegeben.