Analysis einer Variablen

— Blatt 9 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Welche beiden Versionen des Quotientenkriteriums sind Ihnen aus der Vorlesung bekannt? Was ist bei der Anwendung des Quotientenkriteriums zu beachten?

(b) Mit welchem Konvergenzkriterium lässt sich die *Divergenz* der harmonischen Reihe nachweisen?

(c) Geben Sie (ohne Begründung) alle Häufungspunkte, alle Berührpunkte und alle isolierten Punkte der Teilmenge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ an.

(d) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ und $b, c \in \bar{\mathbb{R}}$, wobei b ein Berührpunkt von D ist. Was bedeutet nach Definition die Stetigkeit einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in a? Was bedeutet die Gleichung $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$?

(e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 0$. Geben Sie (ohne Begründung) eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_n x_n = 0$ an, für die *nicht* $\lim_n f(x_n) = f(0)$ gilt.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n 2^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+7} - 2}$

Aufgabe 2

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{für} \quad x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Punkt 1 unstetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f im Punkt $\frac{1}{2}$ stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x > 1$ stetig ist.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion.

(a) Sei $A =]-\infty, 0]$ und $B = [0, +\infty[$. Zeigen Sie: Sind $f|_A$ und $f|_B$ stetige Funktionen, dann ist auch f eine stetige Funktion.

(b) Geben Sie konkrete Beispiele für Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \cup B = \mathbb{R}$ und für eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ an, so dass $f|_A$ und $f|_B$ stetig sind, die Funktion f aber in *keinem Punkt* von $\mathbb{R}$ stetig ist. Weisen Sie nach, dass f, A und B die angegebenen Eigenschaften tatsächlich besitzen.
Hinweis: Versuchen Sie es mit $A = \mathbb{Q}$.

Dieses Blatt wird vom 19. bis zum 22. Januar im Tutorium bearbeitet.

Analysis einer Variablen

— Blatt 9 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(7+3 Punkte)*

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, und geben Sie an, bei welchen Reihen sogar absolute Konvergenz vorliegt. Begründen Sie jeweils Ihre Ergebnisse.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n-1)^2+1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+3n+2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{15n+7}{n^2+6n+8} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

(b) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x^2-1)^n$ konvergiert, und für welche Werte sie divergiert. Auch hier begründen Sie bitte Ihr Ergebnis.

Aufgabe 2 *(5+5 Punkte)*

Seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} -x^2 & \text{für} \quad x < 0 \\ x^3 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f und g in jedem Punkt von $\mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

Aufgabe 3 *(1+3+3+3 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen von f.

(b) Zeigen Sie, dass f stetig im Punkt $\frac{1}{4}$ und unstetig im Punkt 2 ist.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch $a_n = f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist.

(d) Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ nicht existiert.

Abgabe: Donnerstag, 28. Januar 2021, 10:15 Uhr

Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.