Analysis einer Variablen

— Blatt 7 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Geben Sie an, was es nach Definition bedeutet, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $\mathbb{R}$ konvergiert, sowohl umgangssprachlich formuliert als auch in Quantorenschreibweise.

(b) Was bedeutet die Aussage anschaulich, wenn man die Folge in ein Koordinatensystem einträgt (Stichwort „ε-Streifen“)?

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und ein $a \in \mathbb{R}$ an, die die Aussage

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

erfüllt, die aber nicht gegen a konvergiert (Nachweis nicht erforderlich).

(d) Was besagen die Grenzwertsätze? Was ist bei der Anwendung zu beachten?

(e) Gelten die Grenzwertsätze auch für uneigentliche Konvergenz? Welcher Unterschied besteht hier im Vergleich zur Konvergenz im herkömmlichen Sinn?

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die folgenden beiden Grenzwerte.

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n} \quad , \quad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

Hinweis: Für die Berechnung des zweiten Grenzwerts schreiben Sie den Ausdruck so als Bruch, dass die dritte binomische Formel $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ auf den Zähler angewendet werden kann.

Aufgabe 2

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uneigentlich gegen $+\infty$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine negative Zahl $c \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $\lim_n(a_n b_n) = -\infty$ gilt.

(b) Geben Sie konkrete Beispiele für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 1$$

erfüllt ist, und weisen Sie dies nach.

(c) Geben Sie ohne Nachweis weitere Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an mit

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} d_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (c_n d_n) = -\infty.$$

Aufgabe 3

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $a_n > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und ebenso $a_n < -1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt. Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Dieses Blatt wird am 22. und 23. Dezember und am 7. und 8. Januar im Tutorium bearbeitet.

Analysis einer Variablen

— Blatt 7 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(4+2+4 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{n-\sqrt{n}+7}{2n+\sqrt{n}+3}$ (mit Nachweis).

(b) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim_n a_n^2 = 2$, dann konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und zwar gegen den Wert $\sqrt{2}$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{2n}} - \sqrt{n-\sqrt{2n}}\right).$$

Hinweis: Quadrieren Sie den Ausdruck, und orientieren Sie sich dann an der Lösung von Tutoriumsaufgabe 1 (b).

Aufgabe 2 (3+4+3 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim_n a_n = +\infty$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_n a_n^{-1} = 0$ gilt.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_n a_n = 0$.
Zeigen Sie, dass $\lim_n a_n^{-1} = +\infty$ gilt.

(c) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestehend aus reellen Zahlen ungleich Null mit $\lim_n a_n = 0$ an, bei der die Folge $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ weder eigentliche noch uneigentliche Grenzwerte besitzt, und weisen Sie dies nach.

Aufgabe 3 *(4+6 Punkte)*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\lim_n a_{2n} = 0$ und $\lim_n a_{2n+1} = 1$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(b) Existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim_n a_{2n} = c$ und $\lim_n a_{2n+1} = c$, dann folgt $\lim_n a_n = c$.

Abgabe: Donnerstag, 14. Januar 2021, 10:15 Uhr
Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.