Analysis einer Variablen

— **Blatt 6** —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Was ist eine induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$?

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\mathbb{N}$ und den induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$?

(c) Wie lautet die Dreiecksungleichung für bewertete Körper?

(d) Gibt es eine komplexe Zahl z mit $z^4 + 1 = z^3 + 2z + 7$?

(e) Seien $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Zeigen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$, dann gilt auch $f(\bar{z}) = 0$. Schließen Sie daraus, dass f eine gerade Anzahl nicht-reeller Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit Hilfe folgender Einzelschritte, dass für kein $m \in \mathbb{Z}$ ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $m < n < m + 1$ existiert.

(a) Weisen Sie nach, dass $M = \{1\} \cup [2, +\infty[$ eine induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

(b) Begründen Sie, dass kein $n \in \mathbb{N}$ mit $1 < n < 2$ existiert.

(c) Sei nun $m \in \mathbb{Z}$ vorgegeben. Beweisen Sie, dass kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $m < n < m + 1$ existiert.

Aufgabe 2

(a) Sei $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ ein bewerteter Körper. Beweisen Sie für alle $z, w \in \mathbb{K}$ die sogenannte „umgekehrte Dreiecksungleichung“ $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

(b) Bestimmen Sie drei komplexe Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$.
Hinweis: Es gilt $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$. Die Nullstellen des zweiten Faktors findet man durch quadratische Ergänzung.

Aufgabe 3

(a) Beweisen Sie, dass jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ein kleinstes und jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ein größtes Element besitzt.

(b) Weisen Sie nach, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $|x - m| \leq \frac{1}{2}$ existiert.

(c) Zeigen Sie, dass es für jedes $z \in \mathbb{C}$ jeweils $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $|z - (a + ib)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ gibt.

Dieses Blatt wird vom 15. bis zum 18. Dezember im Tutorium bearbeitet.

Analysis einer Variablen

— Blatt 6 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(2+3+3+2 Punkte)*

Die Menge der *abbrechenden Dezimalbrüche* in $\mathbb{R}$ ist definiert durch

$$M \quad = \quad \{c + d \cdot 10^{-r} \mid c, d \in \mathbb{Z}\ ,\ r \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leq d < 10^r\}.$$

Beweisen Sie durch folgende Einzelschritte, dass M eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

(a) Zeigen Sie: Gibt es für beliebig vorgegebene $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ jeweils ein $x \in]a, b[\cap M$, dann trifft diese Aussage auch für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ (ohne die Voraussetzung $a > 0$) zu.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ vorgegeben, $\varepsilon = b - a$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $10^{-r} < \varepsilon$. Zeigen Sie, dass ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a < k \cdot 10^{-r} < b$ existiert.

(c) Seien $k, r \in \mathbb{N}$. Weisen Sie nach, dass es dann $c, d \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq d < 10^r$ und $k = 10^r c + d$ gibt.

(d) Beweisen Sie nun, dass M eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2 *(5+5 Punkte)*

(a) Sei $\alpha = -1 + \sqrt{3}i \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie α^n für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden beiden Gleichungen.

$$z^2 = 1 + i \qquad , \qquad z^2 + 6z + 8 = i$$

Aufgabe 3 *(3+3+4 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ genau dann dicht in M liegt, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $m \in M$ mit $|m - x| < \varepsilon$ existiert.

(b) Wir bezeichnen eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ als *dicht*, wenn für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $m \in M$ mit $|m - z| < \varepsilon$ existiert (wobei diesmal natürlich der komplexe Absolutbetrag gemeint ist). Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ keine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass sowohl $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ als auch das Komplement $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i)$ dichte Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind.

Abgabe: Donnerstag, 7. Januar 2020, 10:15 Uhr
Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.