Analysis einer Variablen

— Blatt 4 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Sei $\mathbb{K}$ eine Menge, und seien $+$ und $\cdot$ zwei Verknüpfungen auf $\mathbb{K}$. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper ist?

(b) Seien a und b Körperelemente. Wie sind die Elemente $-a$ und $a - b$ definiert?

(c) Wie ist eine Halbordnung, wie eine Totalordnung definiert?

(d) Wie erhält man durch eine Anordnung $\mathbb{K}^+$ auf einem Körper $\mathbb{K}$ eine Totalordnung?

Aufgabe 1

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper bestehend aus drei Elementen, $\mathbb{K} = \{0, 1, a\}$, wobei 0 das Null- und 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch diese Angaben bereits eindeutig festgelegt sind, d.h. füllen Sie die beiden Verknüpfungstabellen aus und begründen Sie die einzelnen Einträge.

$+$	0	1	a
0			
1			
a			

,

$\cdot$	0	1	a
0			
1			
a			

Aufgabe 2

Sei $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ ein angeordneter Körper. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\forall a \in \mathbb{K} : \exists b \in \mathbb{K} : b > a$

(b) $\exists a \in \mathbb{K} : \forall b \in \mathbb{K} : b > a$

(c) $\forall a \in \mathbb{K} : \exists b \in \mathbb{K} : \forall c \in \mathbb{K} : a < b < c$

Dabei ist $a < b < c$ eine Kurzschreibweise für die Aussage $(a < b) \wedge (b < c)$.

Aufgabe 3

(a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, der aus endlich vielen Elementen besteht. Zeigen Sie: Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$, und die minimale natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist eine Primzahl. Man nennt sie die *Charakteristik* von $\mathbb{K}$.

Hinweis: Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl $p > 1$ mit der Eigenschaft, dass es keine $r, s \in \mathbb{N}$ mit $p = rs$ und $1 < r, s < p$ gibt.

(b) Beweisen Sie, dass auf einem Körper mit endlich vielen Elementen keine Anordnung existiert.

Dieses Blatt wird vom 1. bis zum 4. Dezember im Tutorium bearbeitet.

Analysis einer Variablen

— **Blatt 4** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(2+2+4+2 Punkte)*

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper bestehend aus vier Elementen, $\mathbb{K} = \{0, 1, a, b\}$, wobei 0 das Null- und 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie: Ist eines der drei Elemente $1, a, b$ sein eigenes Negatives, so trifft dies auch für die beiden anderen Elemente zu. (Besonders einfach ist dies, wenn man von der Gleichung $1 = -1$ ausgeht.)

(b) Zeigen Sie, dass jedes Element in $\mathbb{K}$ sein eigenes Negatives ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch folgende Tabellen gegeben sind.

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

,

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

(d) Bestimmen Sie $n_{\mathbb{K}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Erhält man auf diese Weise alle Elemente des Körpers $\mathbb{K}$?

Aufgabe 2 *(2+2+3+3 Punkte)*

Sei $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ ein angeordneter Körper. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\forall a \in \mathbb{K} : \exists b, c \in \mathbb{K} : b < a < c$

(b) $\exists a, b, c \in \mathbb{K} : a < b < c < a$

(c) $\forall a, b \in \mathbb{K} : \exists c \in \mathbb{K} : (a = 0) \vee (ac = b)$

(d) $\exists a \in \mathbb{K} : \forall b \in \mathbb{K} : \exists c \in \mathbb{K} : (a < b < c) \vee (c < b \leq a)$

Aufgabe 3 *(3+3+4 Punkte)*

Sei $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ ein angeordneter Körper, und seien $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

(a) Zeigen Sie: Gilt $a < b$ und $c < d$, und sind c, d in $]a, b[$ enthalten, dann folgt daraus $[a, b] \setminus [c, d] = [a, c[\cup]d, b]$.

(b) Sind $a, b \in \mathbb{K}_+$, dann ist $a < b$ äquivalent zu $a^2 < b^2$.

(c) Ist $b \in \mathbb{K}^+$, dann gilt $\{x \in \mathbb{K} \mid (x - a)^2 < b^2\} =]a - b, a + b[$.

Abgabe: Donnerstag, 10. Dezember 2020, 10:15 Uhr

Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.