Analysis einer Variablen

— Blatt 12 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Wie lautet die Umkehrregel? Von welchen Funktionen wurde in der Vorlesung mit der Umkehrregel die Ableitung berechnet?

(b) Was ist der Unterschied zwischen einem lokalen und einem globalen Maximum?

(c) Welche lokalen Maxima besitzt die Sinusfunktion? Handelt es sich dabei um globale Maxima?

(d) Was ist der Unterschied zwischen einem notwendigen und einem hinreichenden Kriterium für ein Extremum?

(e) Angenommen, eine mindestens zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt bei $a = 0$ ein lokales Maximum. Gilt dann auf jeden Fall $f'(a) = 0$? Gilt auf jeden Fall auch $f''(a) < 0$?

Aufgabe 1

(a) Bestätigen Sie die Gleichung $\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$ für alle $x \in \left]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[$.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $\arcsin :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ mit Hilfe der Umkehrregel.

(c) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^x$.

Aufgabe 2

Sei $D = [0, \frac{5}{2}]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$.

(a) Bestimmen Sie (mit Nachweis) alle lokalen und alle globalen Extrema von f. (Diese können sich auch in den Endpunkten 0 und $\frac{5}{2}$ des Intervalls befinden. Falls nötig, können auch die hinreichenden Kriterien für lokale Extrema bereits verwendet werden.)

(b) Bestimmen Sie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < x_1 < x_2 < \frac{5}{2}$, so dass f auf jedem der Intervalle $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, \frac{5}{2}]$ streng monoton wachsend oder fallend ist. Weisen Sie jeweils nach, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit dem einzigen lokalen Maximum an der Stelle $a = 0$. Es gelte $f(0) = 1$ sowie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt ein $c \in \mathbb{R}^+$, so dass $f(x) < 1$ für alle x außerhalb des Intervalls $[-c, c]$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass 0 ein globales Maximum von f ist. *Hinweis:* Maximumsprinzip

Dieses Blatt wird vom 9. bis zum 12. Februar im Tutorium bearbeitet.

Analysis einer Variablen

— Blatt 12 —

(Wiederholungsaufgaben)

Aufgabe 1

Bestimmen Sie Maximum und Minimum, Supremum und Infimum der folgenden beiden Mengen, sofern diese existieren.

$$A = \{1 + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \quad , \quad B = \exp(\,]0,1[\, \cap \mathbb{Q}\,).$$

Aufgabe 2

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n a_n = +\infty$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n + 1} \quad = \quad 1 \qquad \text{gilt.}$$

(b) Sei nun $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die weder nach oben noch nach unten beschränkt ist. Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist und weder gegen $+\infty$ noch gegen $-\infty$ uneigentlich konvergiert.

Aufgabe 3

(a) Bestimmen Sie den Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$ (mit Nachweis.)

(b) Zeigen Sie, dass der Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{x}$ nicht existiert, weder als reelle Zahl, noch als uneigentlicher Grenzwert (alo gegen $\pm\infty$).

(c) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ gilt.

Keine Abgabe! (Es wird aber in Kürze eine Musterlösung erstellt.)