Analysis einer Variablen

— **Blatt 1** —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Was unterscheidet eine Aussage von einem beliebigen Satz?

(b) Welche Möglichkeiten gibt es zur Verknüpfung von Aussagen?

(c) Was versteht man unter einem logischen Schluss?

(d) Wo liegt der Unterschied in der Bedeutung von $\in$ und $\subseteq$?

(e) Welche von den Ausdrücken $1 \in 1$, $1 \in \{1\}$, $\{1\} \in 1$, $\{1\} \in \{1\}$ sind (sinnvolle) mathematische Aussagen, welche davon sind wahr? Wie sieht es aus, wenn man überall $\in$ durch $\subseteq$ ersetzt? (Wir gehen hier davon aus, dass die Zahl 1 keine Menge ist.)

Aufgabe 1

Seien φ, ψ und ρ Aussagen. Wir betrachten die logische Schlussregel

$$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \rho) \wedge (\psi \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho.$$

(a) Beweisen Sie die Gültigkeit der Schlussregel durch das Ausfüllen einer Wahrheitstabelle.

(b) Überlegen Sie, warum es sinnvoll ist, diese Regel als *Beweis durch Fallunterscheidung* zu bezeichnen.

Aufgabe 2

In einem Lehrbuch über Algebraische Geometrie liest man Folgendes: „Ein affines Schema X ist genau dann integer, wenn es reduziert und irreduzibel ist. Ist X reduziert, dann enthält sein Koordinatenring A keine echten nilpotenten Elemente. Enthält A also echte nilpotente Elemente, dann ist X nicht integer.“

(a) Diese drei Sätze, die wir mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bezeichnen, sind Verknüpfungen von insgesamt nur vier Teilaussagen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Geben Sie diese an.

(b) Stellen Sie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ als logische Verknüpfung von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ dar.

(c) Weisen Sie nach, dass $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3$ eine Tautologie ist.

Aufgabe 3

(a) Geben Sie alle Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ an.

(b) Wieviele dieser Teilmengen A erfüllen die Bedingung $\{1, 2\} \subsetneq A$?

(c) Für wieviele Teilmengen A gilt $2 \in A$, aber nicht $A \subseteq \{1, 2\}$?

Dieses Blatt wird vom 10. bis zum 13. November im Tutorium bearbeitet.

Analysis einer Variablen

— Blatt 1 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

Wie in der Tutoriumsaufgabe sei M die Menge aller Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Geben Sie alle Elemente von $T = \{A \in M \mid A \cap \{1, 2\} = \varnothing \vee \{1, 2, 3, 4\} \setminus A \supseteq \{3\}\}$ an.

(b) Zeigen Sie anhand eines konkreten Gegenbeispiels, dass die Implikation

$$(A \subsetneq B) \wedge (B \supseteq C) \Rightarrow C \supseteq A$$

nicht für alle $A, B, C \in M$ wahr ist.

(c) Geben Sie drei konkrete Elemente $A, B, C \in M$ an, für welche die Implikation stimmt, und überprüfen Sie, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Aufgabe 2

Diesmal werfen wir einen Blick in ein Topologie-Lehrbuch. „Sei X ein topologischer Raum und U eine Teilmenge von X mit $\varnothing \subsetneq U \subsetneq X$. Ist U sowohl offen als auch abgeschlossen, dann ist X nicht zusammenhängend. Ist X also zusammenhängend und U offen, dann ist U nicht abgeschlossen.“

Wir bezeichnen den zweiten Satz mit α_2 und den dritten Satz mit α_3. Zeigen Sie wie auf dem Tutoriumsblatt, dass $\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3$ eine Tautologie ist.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgende Mengengleichung.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 10x + 21)(y - 2) = 0\} \quad = \quad \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(3, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(7, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Abgabe: Donnerstag, 19. November 2020, 10:15 Uhr
Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.