

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(12 Punkte)

- a) Sei p eine Primzahl und G eine p -Gruppe. Zeigen Sie, dass G genau dann einfach ist, wenn G eine Gruppe der Ordnung p ist.

Im Weiteren sei G stets eine Gruppe der Ordnung $p^m q$ mit einer Primzahl p und $q, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Es gelte $p \nmid q$. Es sei P eine p -Sylowuntergruppe von G .

- b) Zeigen Sie, dass es einen Gruppenhomomorphismus $\varphi: G \rightarrow S_q$ mit $\ker(\varphi) \leq P$ gibt, wobei S_q die symmetrische Gruppe der Menge $\{1, \dots, q\}$ bezeichnet.
- c) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe G der Ordnung $p^m q$ mit p, q, m wie oben und $p^m \nmid (q-1)!$ gibt.

Aufgabe 2

(12 Punkte)

Wir betrachten das Polynom $f := X^4 - 6X^2 - 3$ in $\mathbb{Q}[X]$.

- a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$.

Seien nun α, β Nullstellen von f wie in Teilaufgabe a) mit $\alpha \neq \pm\beta$.

- b) Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$ und $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ gelten.
- c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ galoissch über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ist und bestimmen Sie die Struktur der Galoisgruppe.

Aufgabe 3

(12 Punkte)

Sei p eine Primzahl und bezeichne $a \mapsto \bar{a}$ die Restklassenabbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- a) Zeigen Sie, dass $\varphi: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, h \mapsto \overline{h(0)}$, ein surjektiver Homomorphismus von Ringen ist.
- b) Zeigen Sie, dass $\ker(\varphi) = (p, x)$ gilt.
- c) Zeigen Sie, dass (p, x) ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}[x]$ ist.
- d) Begründen Sie, ob (x) ein Primideal in $\mathbb{Z}[x]$ ist.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring. Ein Idempotent ist ein Element $e \in R$ mit der Eigenschaft $e^2 = e$.

- a) Sei p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: In $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ gibt es genau zwei Idempotenten.

Im Folgenden sei $N = 2^2 \cdot 5 \cdot 37$.

- b) Bestimmen Sie die Anzahl der Idempotenten in $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.
- c) Berechnen Sie explizit ein Idempotent $e \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ mit $e \equiv 0 \pmod{20}$ und $e \equiv 1 \pmod{37}$.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Sei $(-, -) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische und positiv semi-definite Bilinearform.

Sie dürfen die folgende Aussage ohne Beweis verwenden:

Für alle v, w in V gilt $(v, v)(w, w) \geq (v, w)^2$.

- a) Zeigen Sie, dass $U := \{v \in V \mid (v, v) = 0\}$ ein linearer Unterraum von V ist.
- b) Zeigen Sie, dass die Zuordnung

$$\langle v_1 + U, v_2 + U \rangle := (v_1, v_2)$$

mit U aus Teilaufgabe a) wohldefiniert ist und ein (positiv-definites) Skalarprodukt auf V/U liefert.

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

(12 Punkte)

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Es gibt eine Gruppe, in der jedes nichttriviale Element entweder Ordnung 2 oder Ordnung 1013 hat und Elemente beider Ordnungen vorkommen. (Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass 1013 eine Primzahl ist.)
- b) Es gibt eine abelsche Gruppe, in der jedes nichttriviale Element entweder Ordnung 2 oder Ordnung 1013 hat.
- c) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zwei Matrizen, welche dasselbe charakteristische Polynom sowie dasselbe Minimalpolynom über $\mathbb{C}$ haben. Dann sind A und B ähnlich.

(12 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Für reelle quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichne A^T die Transponierte von A . Ferner bezeichne E_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Sei nun $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefsymmetrisch (d. h. $S^T = -S$). Man zeige:

- a) Ist λ ein reeller Eigenwert von S , dann gilt $\lambda = 0$.
(Hinweis: Man transponiere die Eigenwertgleichung $Sv = \lambda v$.)
- b) $E_n + S$ ist invertierbar.
- c) $E_n - S$ und $(E_n + S)^{-1}$ kommutieren.
- d) $M = (E_n - S)(E_n + S)^{-1}$ ist orthogonal (d. h. $MM^T = E_n$).
(Hinweis: Es gelten die Identitäten $(AB)^T = B^T A^T$ und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.)

Aufgabe 3

(12 Punkte)

Sei $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{F}_{2^r}$. Wir betrachten das Polynom $f := x^2 + x + c$ über $\mathbb{F}_{2^r}$. Für $a \in \mathbb{F}_{2^r}$ sei $T(a) := \sum_{i=0}^{r-1} a^{2^i}$ und $\phi(a) := a^2 + a$. Zeigen Sie:

- a) $a \mapsto T(a)$ und $a \mapsto \phi(a)$ sind additive Gruppenhomomorphismen $\mathbb{F}_{2^r} \rightarrow \mathbb{F}_{2^r}$.
- b) $\text{im}(T) = \ker(\phi) = \mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_{2^r}$.
- c) $\text{im}(\phi) = \ker(T)$.
- d) f hat genau dann Nullstellen in $\mathbb{F}_{2^r}$, wenn $T(c) = 0$ gilt.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Zeigen Sie, dass es mindestens vier Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung 18 gibt.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Seien $f := x^5 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$ und K der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ mit der Galoisgruppe $G := \text{Gal}(K|\mathbb{Q})$.

- a) Bestimmen Sie den Grad $[K : \mathbb{Q}]$.
- b) Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler H mit den folgenden beiden Eigenschaften enthält:
 - i) $H \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
 - ii) $G/H \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- c) Zeigen Sie, dass G nicht abelsch ist.

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(12 Punkte)

Sei G eine (nicht notwendig endliche) Gruppe und sei H eine Untergruppe von G .

- a) Geben Sie die Definition des Index $[G : H]$ von H in G an.
- b) Zeigen Sie: Falls der Index von H in G zwei ist, so ist H bereits ein Normalteiler in G .
- c) Finden Sie ein Beispiel für G und H mit Index $[G : H] = 3$ derart, dass H kein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 2

(12 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe mit mehr als zwei Elementen und gelte $a^{-1} = a$ für alle $a \in G$. Zeigen Sie:

- a) Die Gruppe G ist abelsch.
- b) Es existiert eine Untergruppe H von G der Ordnung 4.
- c) Für das Produkt aller Gruppenelemente in G gilt $\prod_{a \in G} a = 1$.

Aufgabe 3

(12 Punkte)

Sei L/K eine Körpererweiterung. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

- a) Die Körpererweiterung ist algebraisch.
- b) Jeder Ring R mit $K \subseteq R \subseteq L$ ist bereits ein Körper.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Sei $\zeta := \exp(\frac{2\pi i}{5}) \in \mathbb{C}$.

- a) Zeigen Sie: Das Minimalpolynom von $\alpha := \zeta + \zeta^4$ über $\mathbb{Q}$ ist durch $x^2 + x - 1$ gegeben.
- b) Begründen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta)$ gilt, und geben Sie die Elemente der Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\zeta)$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ an.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$ und φ ein Endomorphismus von V mit $\varphi^2 = \text{id}_V$.

- a) Zeigen Sie, dass φ diagonalisierbar ist.
- b) Begründen Sie, dass die Aussage aus Teilaufgabe a) im Allgemeinen falsch ist, wenn K die Charakteristik 2 hat.

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Behauptungen jeweils mit einer kurzen Begründung an, ob sie wahr oder falsch ist.

- a) Jede Gruppe der Ordnung 49 ist zyklisch.
- b) Jede Körpererweiterung vom Körpergrad 2 ist separabel.
- c) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q}$ ist normal.
- d) Sind G und H zwei Gruppen, so dass ihr Produkt $G \times H$ abelsch ist, so sind auch G und H abelsch.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen von $a^2 + b^2 = 4^n$ mit $a, b, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl der normierten irreduziblen Faktoren des Polynoms $f := X^{256} - X$ in $\mathbb{F}_2[X]$ mit ihren jeweiligen Graden. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise kurz.

Hinweis: Betrachten Sie die Nullstellen von f in $\mathbb{F}_{256}$ und dessen Unterkörper.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Seien G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G . Mit U bezeichnen wir die Vereinigung aller zu H konjugierten Untergruppen gHg^{-1} für $g \in G$. Zeigen Sie mit jeweils kurzen Beweisen:

- a) Sind $g_1, \dots, g_n \in G$ Repräsentanten der Linksnebenklassen von G modulo H , so gilt

$$U \setminus \{1\} = \bigcup_{i=1}^n (g_i H g_i^{-1} \setminus \{1\}).$$

- b) Die Menge U hat höchstens $\text{ord } G - [G : H] + 1$ Elemente.
- c) Wenn H jeweils mindestens ein Element einer jeden Konjugationsklasse von G enthält, dann gilt schon $H = G$.
- d) Sei G eine transitive Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass G ein Element ohne Fixpunkt besitzt (d. h. es gilt $g(i) \neq i$ für alle $i = 1, \dots, n$).
Hinweis: Betrachten Sie $H := \{g \in G \mid g(1) = 1\}$.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Seien K ein Körper positiver Charakteristik p , $\alpha \in K$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit jeweils kurzen Begründungen:

- a) Die p -te Potenz A^p von A ist die Einheitsmatrix.
- b) Wenn $\alpha \neq 0$ gilt, dann ist A nicht diagonalisierbar.
- c) Seien L ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und B eine quadratische Matrix über L mit der Eigenschaft, dass die Potenz B^k für ein geeignetes $k \geq 1$ die Einheitsmatrix ist. Dann ist B diagonalisierbar.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ das n -te Kreisteilungspolynom und $\zeta_n \in \mathbb{C}$ eine primitive n -te Einheitswurzel. Seien $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ teilerfremd.

- a) Zeigen Sie, dass $\zeta_a \zeta_b$ eine primitive ab -te Einheitswurzel ist.
- b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_a \zeta_b) = \mathbb{Q}(\zeta_a, \zeta_b)$ gilt.
- c) Zeigen Sie, dass Φ_a in $\mathbb{Q}(\zeta_b)[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

- a) Sei $P := p_0 + p_1X + \cdots + p_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom. Sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von P mit teilerfremden $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann a ein Teiler von p_0 und b ein Teiler von p_n sind.
- b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $P := p_0 + p_1X + \cdots + p_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{Q}[X]$ und $Q := q_0 + q_1X + \cdots + q_{m-1}X^{m-1} + X^m \in \mathbb{Z}[X]$ normierte Polynome. Zeigen Sie: Wenn PQ ganze Koeffizienten hat (also in $\mathbb{Z}[X]$ liegt), dann hat auch P ganze Koeffizienten.
- c) Zerlegen Sie das Polynom $P := X^4 + 1$ in $\mathbb{R}[X]$ in über $\mathbb{R}$ irreduzible Polynome.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Für $t \in \mathbb{Q}$ betrachten wir die rationale 2×2 -Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A_t .
- b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_t .
- c) Bestimmen Sie die Menge derjenigen $t \in \mathbb{Q}$, für die A_t diagonalisierbar ist.
- d) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$A_t^n = \begin{pmatrix} 1-nt & nt \\ -nt & 1+nt \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und G eine transitiv auf $\Omega := \{1, 2, \dots, n\}$ operierende Gruppe. Sei weiter U eine Untergruppe von G mit zu n teilerfremdem Index $[G : U]$. Zeigen Sie, dass auch U transitiv auf Ω operiert.

Hinweis: Sei G_1 der Stabilisator von 1 in G . Betrachten Sie die Indizes in den Ketten $G_1 \cap U \leq G_1 \leq G$ und $G_1 \cap U \leq U \leq G$ und drücken Sie die Länge der Bahn von U durch 1 mittels G_1 und U aus.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Sei k ein Körper mit positiver Charakteristik p und $\lambda \in k \setminus \{0\}$. Sei $L := k(t)$, wobei t ein über k transzendentes Element sei. Wir betrachten den k -linearen Körperautomorphismus $\sigma: L \rightarrow L$, der t auf $t + \lambda$ abbildet. Sei L^σ der Unterkörper von L , der von σ elementweise fixiert wird.

- a) Zeigen Sie, dass für $\eta := t^p - \lambda^{p-1}t$ die Gleichheit $\sigma(\eta) = \eta$ gilt.
- b) Zeigen Sie, dass t algebraisch über L^σ ist.
- c) Sei $m \in L^\sigma[X]$ ein Polynom mit t als Nullstelle. Zeigen Sie, dass dann auch $t + \ell\lambda$ für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ Nullstellen von m sind.
Hinweis: Die Menge $\{t + \ell\lambda \mid \ell \in \mathbb{Z}\} = \{t, t + \lambda, \dots, t + (p-1)\lambda\}$ ist endlich, da k die Charakteristik p hat.
- d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von t über L^σ .
- e) Zeigen Sie, dass die Erweiterung L/L^σ eine Galoiserweiterung ist und dass die Galoisgruppe $\text{Gal}(L/L^\sigma)$ von σ erzeugt wird.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(12 Punkte)

Geben Sie jeweils ohne Begründung an:

- a) alle abelschen Gruppen der Ordnung 40 bis auf Isomorphie (und jeden Isomorphietyp nur einmal),
- b) die Anzahl der Konjugiertenklassen der symmetrischen Gruppe S_4 ,
- c) die Menge aller $x \in \mathbb{Z}$, die gleichzeitig $(x \equiv 5 \pmod{11})$ und $(x \equiv 3 \pmod{7})$ erfüllen,
- d) eine $\mathbb{Q}$ -Basis des Körpers $\mathbb{Q}(\zeta)$ mit $\zeta := \exp(2\pi i/5)$,
- e) das Minimalpolynom von $\sqrt{1 + \sqrt{7}}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2

(12 Punkte)

Es sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G| = 380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19$. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

Aufgabe 3

(12 Punkte)

- a) Es seien G eine endliche, einfache Gruppe und p eine Primzahl mit $p \mid |G|$.
Zeigen Sie, dass es keine Untergruppe H von G gibt mit der Eigenschaft $1 < [G : H] < p$.
Hinweis: Benutzen Sie eine geeignete Operation von G auf den Linksnebenklassen von H .
- b) Beantworten Sie mit Begründung:
Gibt es in der alternierenden Gruppe A_5 eine Untergruppe der Ordnung 15?

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Es seien $\alpha := \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $\beta := \sqrt{2 - \sqrt{3}} \in \mathbb{R}$ und $L := \mathbb{Q}(\alpha)$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.

- a) Bestimmen Sie ein Polynom f in $\mathbb{Q}[x]$ vom Grad 4 mit der Nullstelle α .

Im Folgenden können Sie $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$ als bekannt voraussetzen.

- b) Zeigen Sie, dass die Gleichheit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ von Unterkörpern von $\mathbb{C}$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie $(\alpha - \beta)^2$.

- c) Zeigen Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ galoissch ist, und geben Sie die Ordnung der Galoisgruppe $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ an.

- d) Geben Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ an.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Sei q eine Primpotenz und $\mathbb{F}_q$ ein Körper der Ordnung q .

- a) Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{F}_q$ die Gleichung $a^q = a$ gilt.
b) Sei $\varphi : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$ eine Abbildung und setze

$$f := \sum_{a \in \mathbb{F}_q} \varphi(a)(1 - (X - a)^{q-1}) \in \mathbb{F}_q[X].$$

Zeigen Sie die Gleichheit $f(b) = \varphi(b)$ für alle $b \in \mathbb{F}_q$.