# Erinnerung: Gruppenoperationen und Homomorphismen

Sei $G$ eine Gruppe, $X$ eine Menge und $\bullet : G \times X \to X$ eine Gruppenoperation.

- Für jedes $g \in G$ ist $\tau_g : X \to X$, $x \mapsto g \bullet x$ eine Bijektion.
- Die Abbildung $\phi : G \to \mathrm{Per}(X)$, $g \mapsto \tau_g$ ist ein Homomorphismus.
- Ist $X$ endlich und $n = |X|$, dann erhält man wegen $\mathrm{Per}(X) \cong S_n$ zugleich einen Homomorphismus $G \to S_n$. Dieser hat denselben Kern wie $\phi$.
- Ist $p$ eine Primzahl, $G$ eine endliche Gruppe und $X$ die Menge der $p$-Sylowgruppen von $G$, dann ist die Operation $\bullet$ gegeben durch $(g, P) \mapsto gPg^{-1}$ transitiv, nach dem 2. Sylowsatz.

# Aufgabe G4.22 (Frühjahr 1995)

Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 300 gibt.

Ang. $G$ ist eine einfache Gruppe mit $|G| = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Für $p \in \{2, 3, 5\}$ sei $\nu_p$ jeweils die Anzahl der $p$-Sylowgruppen von $G$.

3. Sylowsatz $\Rightarrow \nu_5 \mid 2^2 \cdot 3 \Rightarrow \nu_5 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, außerdem $\nu_5 \equiv 1 \bmod 5$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \not\equiv 1 \bmod 5$, $12 \equiv 2 \not\equiv 1 \bmod 5$

$\Rightarrow n_5 \in \{1, 6\}$ Angenommen $n_5 = 1$. Dann wäre die einzige 5-Sylowgruppe $P$ von $G$ ein Normalteiler aufgrund des 2. Sylowsatzes, wegen $1 < |P| = 25 < |G|$ sogar ein nichttriv. Normalteiler. $\lightning$ da $G$ eine einfache Gruppe ist.

Also gilt $n_5 = 6$. Sei $X$ die Menge der 5-Sylowgruppen von $G$ (also $|X| = 6$). Laut VL ist durch $\circ : G \times X \to X, (g, P) \mapsto gPg^{-1}$ eine Gruppenoperation definiert, die aufgrund des 2

Sylowsatz 3 transitiv ist. Sei $\phi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ der durch $\cdot$ definierte Gruppenhom., mit

$\phi(g)(P) = g \cdot P = gPg^{-1} \quad \forall g \in G,\ P \in X$.

Wegen $|X| = 6$ existiert ein Isom. $\iota : \mathrm{Bij}(X) \to S_6$.

$\Rightarrow$ erhalte einen Hom. $\psi : G \to S_6$ durch $\psi = \iota \circ \phi$.

Sei $N = \ker(\psi)$. Da $G$ einfach ist und $N$ als Kern eines Hom. ein Normalteiler von $G$, gilt $N = \{e_G\}$ oder $N = G$.

1 Fall: $N = G$ Aus $\ker(\psi) = G$ folgt $\psi(g) = \mathrm{id}$

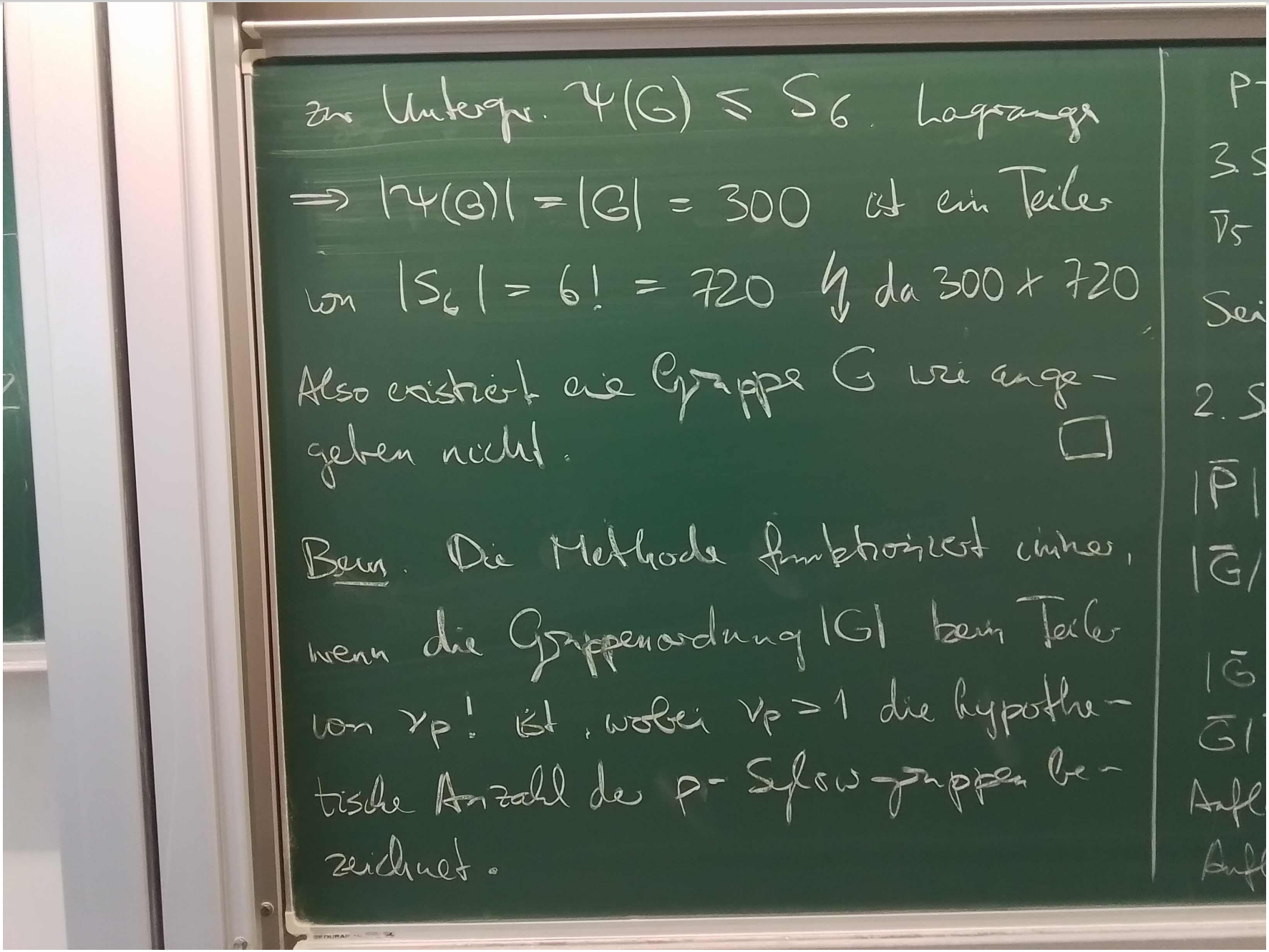
für alle $g \in G \Rightarrow \iota(\phi(g)) = id = \iota(id_X) \; \forall g \in G$

↳ injektiv $\phi(g) = id_X \; \forall g \in G \Rightarrow$

$g \cdot P = \phi(g)(P) = id_X(P) = P \; \forall g \in G$ und $X \in P$ Für ein bel. $P \in X$ ist die Bahn von $P$ also gegeben durch $\{P\}$. Da die Operation transitiv ist, ist $\{P\}$ aber die einzige Bahn und somit $X = \{P\}$ ein Widerspruch zu $|X| = 6$.

2. Fall: $N = \{e_G\}$ Dann ist $\varphi$ injektiv. $\Rightarrow$

$G$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $S_6$, nämlich




Übungen: H13T1A2, H16T3A3

# Die Auflösbarkeit von Gruppen

Sei $G$ eine Gruppe.

- Die Kommutatorgruppe $G'$ von $G$ ist die Untergruppe von $G$, die durch die Kommutatoren $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$ erzeugt wird. Die höheren Kommutatorgruppen von $G$ sind gegeben durch $G^{(0)} = G$ und $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$ für alle $n \geq 0$.

- Eine Gruppe wird auflösbar genannt, wenn ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $G^{(n)} = \{e_G\}$ existiert. Dies ist äquivalent dazu, dass eine abelsche Subnormalreihe für $G$ existiert. Dies ist eine Kette von Untergruppen

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_r = \{e_G\}$$

mit $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ für $0 \leq i < r$, wobei die Faktorgruppen $G_i/G_{i+1}$ abelsch sind.

# Die Auflösbarkeit von Gruppen (Forts.)

- wichtige Regel:

  Ist $N$ ein Normalteiler von $G$, dann ist die Auflösbarkeit von $G$ äquivalent zur Auflösbarkeit von $N$ und $G/N$.

- Die Gruppen $A_n$ und $S_n$ sind auflösbar für $n \leq 4$ und nicht auflösbar für $n \geq 5$.

# F20T1A3

(a) Geben Sie die Definition einer auflösbaren Gruppe an. (siehe Folie)

(b) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 2020 auflösbar ist.

Sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $2020 = 20 \cdot 101 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$.

Sei $\nu$ die Anzahl der 101-Sylowgr. von $G$.

3. Sylowsatz $\Rightarrow \nu \mid 2^2 \cdot 5 \Rightarrow \nu \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, außerdem $\nu \equiv 1 \bmod 101$

Da keine der Zahlen 2, 4, 5, 10, 20 kong.

mit

Äquiva-

→

$\bar{0}$ und

$h = e_H$

dung jedes

vereinstimmt)

Es gibt

der 2, und

ung 2. Da es

ung 2 gibt, sind

za 1 modulo 101 ist, folgt $\nu = 1$.

Sei $N$ die einzige 101-Sylowgruppe.

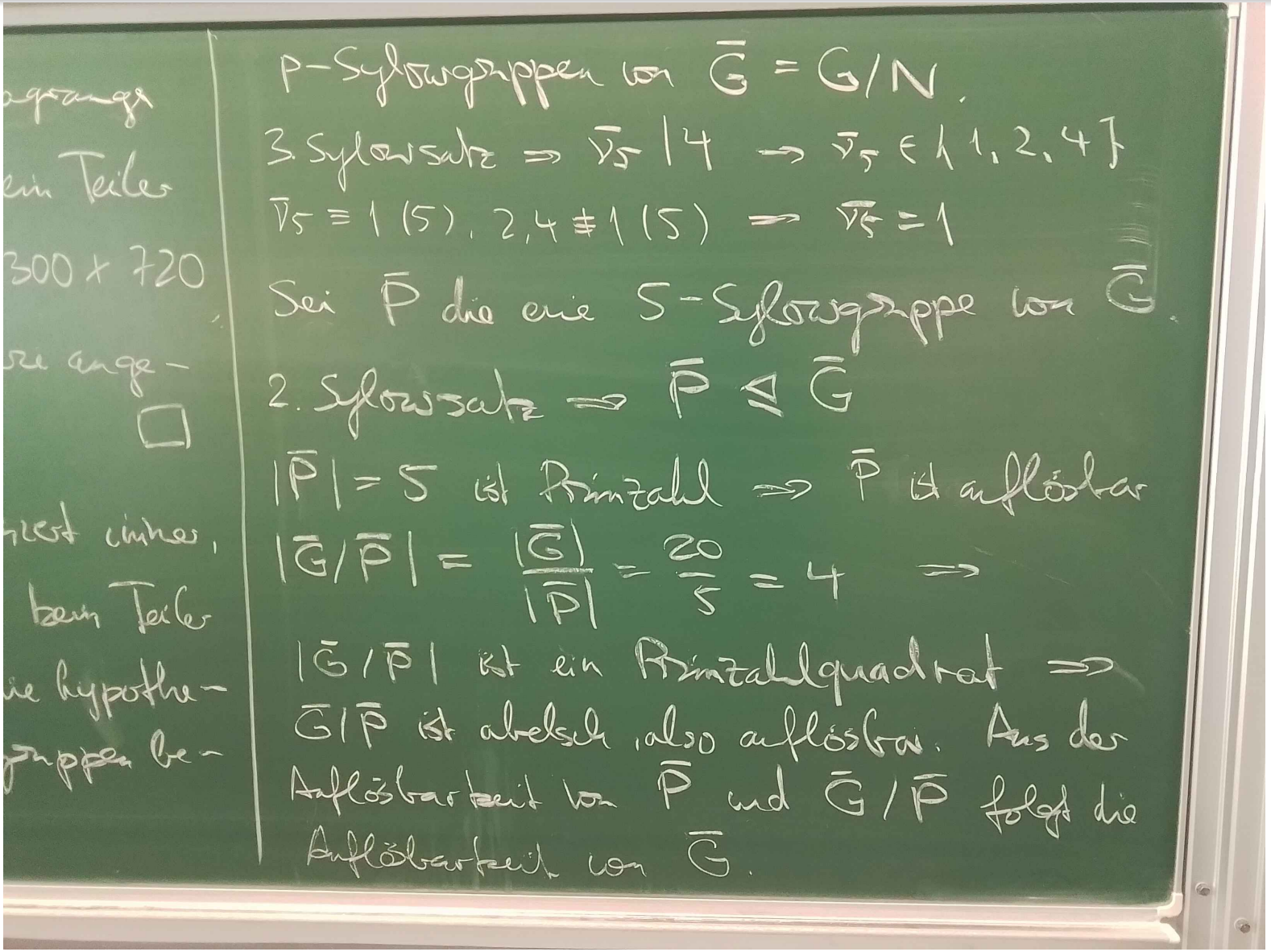
2. Sylowsatz, $\nu = 1 \Rightarrow N \trianglelefteq G$

Es genügt z.Zg., dass $N$ und $G/N$ auflösbar sind, denn daraus folgt die Auflösbarkeit von $G$. Da $|N| = 101$ eine Primzahl ist, ist $N$ zyklisch und damit auch abelsch und auflösbar.

Nach dem Satz von Lagrange ist $|G/N| = (G:N) = \frac{|G|}{|N|} = \frac{2020}{101} = 20 = 2^2 \cdot 5$.

Für $p \in \{2, 5\}$ sei $\bar{\nu}_p$ die Anzahl der

□




Übungen:

- Zeigen Sie: Jede Gruppe der Ordnung 2028 ist auflösbar.
- außerdem: F15T3A2, H17T3A1

# Definition des äußeren semidirekten Produkts

## Satz

Seien $U$ und $N$ Gruppen und $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Wir definieren auf $N \times U$ eine Verknüpfung $*$ durch

$$(n_1, u_1) * (n_2, u_2) \quad = \quad (n_1 \cdot \phi(u_1)(n_2), u_1 \cdot u_2)$$

für $(n_1, u_1), (n_2, u_2) \in N \times U$. Dann ist $(N \times U, *)$ eine Gruppe. Man nennt sie das äußere semidirekte Produkt von $N$ und $U$ und bezeichnet sie mit $N \rtimes_\phi U$.

wichtig:

Die Gruppe $N \rtimes_\phi U$ stimmt genau dann mit dem direkten Produkt $N \times U$ überein, wenn der Homomorphismus $\phi$ trivial ist, also $\phi(u) = \mathrm{id}_N$ für alle $u \in U$ gilt. Wenn aus abelschen Gruppen $N$ und $U$ eine nicht-abelsche Gruppe konstruiert werden soll, benötigt man einen nichttrivialen Homomorphismus $\phi$.

# Semidirekte Produkte

wichtiges Beispiel: Diedergruppen als semidirekte Produkte

- Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Durch $\iota : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a \mapsto -a$ ist ein Automorphismus von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definiert.
- Es gibt einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ mit $\phi(\bar{0}) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ und $\phi(\bar{1}) = \iota$.
- Der Homomorphismus $\phi$ liefert ein semidirektes Produkt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Diese Gruppe ist isomorph zu $D_n$.

# Erinnerung: Automorphismengruppen zyklischer Gruppen

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

- Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ ist $\sigma_a : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x \mapsto ax$ ein Automorphismus.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen Isomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ gegeben durch $a + n\mathbb{Z} \mapsto \sigma_a$.
- Für teilerfremde $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \quad \cong \quad (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times.$$

- Es gilt $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}\}$, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und

$$(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times \quad \cong \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{r-2}\mathbb{Z} \quad \text{für alle } r \geq 2.$$

Laut Lösung ist die Diedergruppe $D_n$ für alle $n \geq 3$ eine nicht-abelsche [illegible]

(c) Geben Sie zwei nicht-isomorphe abelsche und zwei nicht-isomorphe nicht-abelsche Gruppen der Ordnung 2020 an.

Sei $G_1 = \mathbb{Z}/2020\mathbb{Z}$ und $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}/1010\mathbb{Z}$.
Die Gruppe $G_1$ ist zyklisch und somit abelsch und $G_2$ ist abelsch als direktes Produkt zyklischer Gruppen. Außerdem gilt $G_1 \not\cong G_2$, denn $G_1$ besitzt (als zykl. Gruppe der Ordn. 2020) ein Element der Ordnung 2020. In $G_2$ existiert ein

solches Element nicht, denn wegen $1010 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) = (1010 \cdot \bar{a}, 1010 \cdot \bar{b}) = (\bar{0}, \bar{0})$ für alle $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/1010\mathbb{Z}$ gibt es in $G_2$ nur Elemente $(\bar{a}, \bar{b})$ mit $\operatorname{ord}((\bar{a}, \bar{b})) \mid 1010$.

Laut Vorlesung ist die Diedergruppe $D_n$ für alle $n \geq 3$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $2n$. $\Rightarrow$ $G_3 = D_{1010}$ ist eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2020.

Es genügt, eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 505 zu konstruieren, denn ist $H$ eine solche Gruppe, dann ist $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times H$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $4 \cdot 505 = 2020$

[ $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ oder $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})$ ]

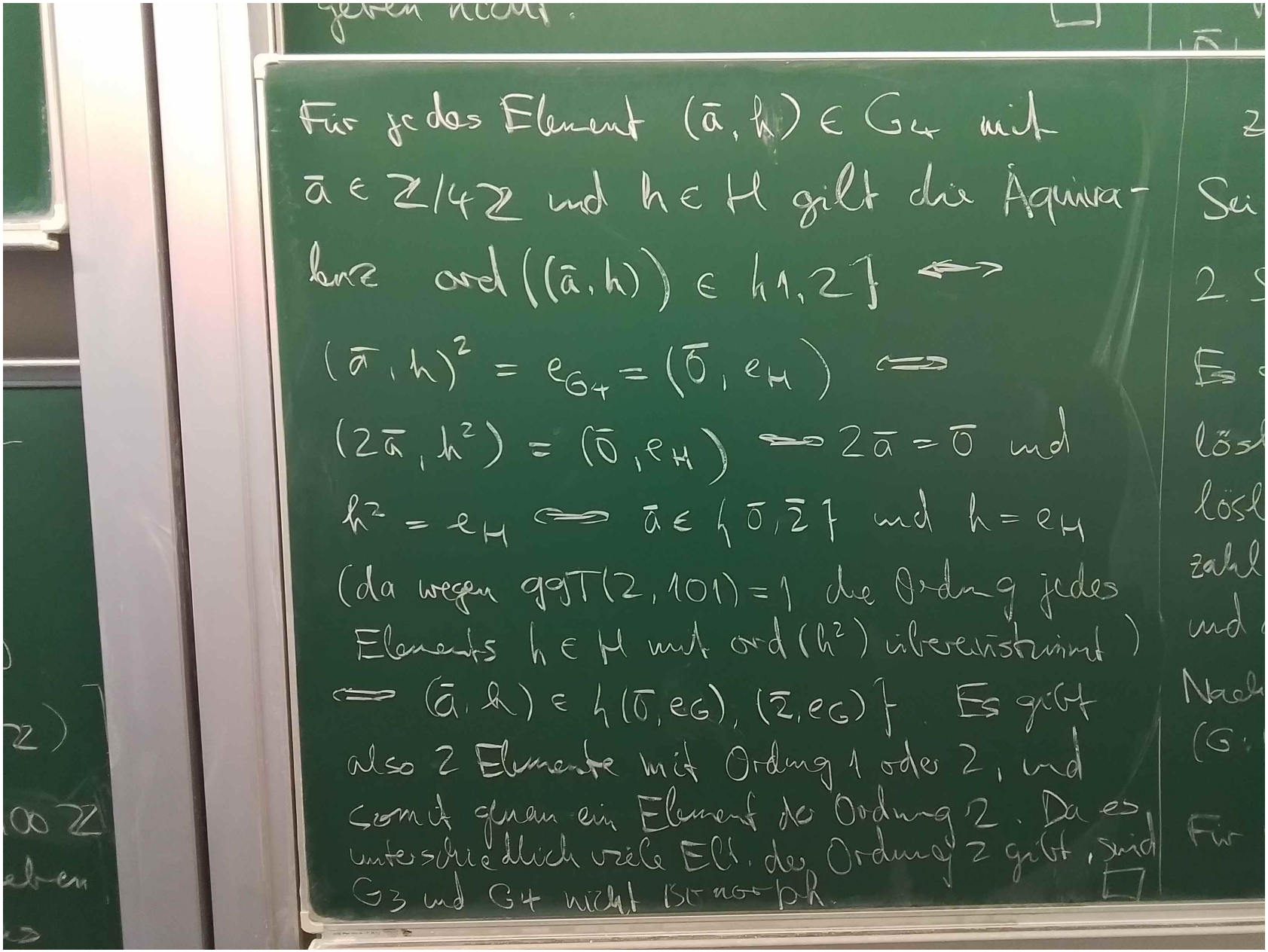
Durch $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$, $a+5\mathbb{Z} \mapsto 20a+100\mathbb{Z}$ ist ein nicht trivialer Homomorphismus gegeben, d.h. nicht jedes Element wird nicht auf das Neutralelement abgebildet.

$[\ \mathbb{Z}/101\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ oder $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})\ ]$

Da 101 eine Primzahl ist, gilt $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$. Damit existiert auch ein nicht-triv. Hom. $\phi: \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})$. Es ist dann $H = \mathbb{Z}/101\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 505, und $G_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times H$ ist eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2020.

noch z.zg.: $G_3 \not\cong G_4$

In $G_3 = D_{1010}$ gibt es 1011 Elemente der Ordnung 2, nämlich 1010 Spiegelungen und die 180°-Drehung.




Übung: H16T2A2