Definition der Sylowgruppen

Definition

Sei p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe der Ordnung $n = p^r m$, wobei m und p teilerfremd sind.

- Eine p-Untergruppe von G ist eine Untergruppe der Ordnung p^s mit $0 \leq s \leq r$.
- Eine p-Sylowgruppe ist eine Untergruppe der Ordnung p^r.

Die Sylowsätze

Satz

Sei G eine Gruppe der Ordnung n, p eine Primzahl und $n = mp^r$ mit $p \nmid m$.

- Erster Sylowsatz:
  Jede p-Untergruppe von G ist in einer p-Sylowgruppe enthalten.
- Zweiter Sylowsatz:
  Je zwei p-Sylowgruppen sind zueinander konjugiert.
- Dritter Sylowsatz:
  Für die Anzahl ν_p der p-Sylowgruppen gilt $\nu_p \equiv 1 \mod p$ und $\nu_p \mid m$.

wichtige Folgerung aus dem Zweiten Sylowsatz:
Für jede p-Sylowgruppe P gilt $P \trianglelefteq G \Leftrightarrow \nu_p = 1$.

Anwendungen der Sylowsätze

Satz

Jede Gruppe der Ordnung 15 ist zyklisch.

Satz

Sei p eine ungerade Primzahl und G eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $2p$. Dann ist G isomorph zur Diedergruppe D_p.

G4.21 (Herbst 1984)

Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 200 einen nichttrivialen Normalteiler besitzt.

Es ist $200 = 8 \cdot 25 = 2^3 \cdot 5^2$

Sei G eine Gruppe mit $|G| = 200$, und für $p \in \{2, 5\}$ sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. 3. Sylowsatz $\Rightarrow$

$n_5 \mid 2^3 \rightarrow n_5 \in \{1, 2, 4, 8\}$, außerdem

$n_5 \equiv 1 \bmod 5$ $2, 4 \not\equiv 1 \bmod 5$, $8 \equiv 3 \not\equiv 1 \bmod 5$

$\rightarrow n_5 = 1$ Sei P die einzige 5-Sylowgr. von G.

Aus dem 2. Sylowsatz folgt $P \trianglelefteq G$ wegen $n_5 = 1$.

$1 < |P| = 25 < |G| \rightarrow P \neq \{e\}$ und $P \neq G$

Dies zeigt, dass P ein nichttrivialer Normalteiler von G ist. $\square$

H26 T3 A2 Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 380 gibt.

Ang. G ist einfache Gruppe mit $|G| = 380 = 20 \cdot 19$
$= 2^2 \cdot 5 \cdot 19$. Für jede Primzahl p sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgruppen. 3. Sylowsatz $\Rightarrow \nu_{19} \mid 20$
$\Rightarrow \nu_{19} \in \{2^i \cdot 5^j \mid i \in \{0,1,2\}, j \in \{0,1\}\}$
$\Rightarrow \nu_{19} \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, außerdem $\nu_{19} \equiv 1 \bmod 19$
$2, 4, 5, 10 \not\equiv 1 \bmod 19 \Rightarrow \nu_{19} \in \{1, 20\}$
ebenso: $\nu_5 \mid 2^2 \cdot 19 \Rightarrow \nu_5 \in \{1, 2, 4, 19, 38, 76\}$

außerdem $\nu_5 \equiv 1 \bmod 5$, $2 \cdot 4 \not\equiv 1 \bmod 5$,
$19 \equiv 4 \not\equiv 1 \bmod 5$, $38 \equiv 3 \not\equiv 1 \bmod 5 \Rightarrow \nu_5 \in \{1, 76\}$

Wäre $\nu_{19} = 1$, dann wäre die einzige 19-Sylowg. P aufgrund des 2. Sylowsatzes ein Normalteiler, und wegen $1 < 19 < |G|$ wäre $P \neq \{e\}$ und $P \neq G$, der Normalteiler also nichttrivial. ↯ da G einfach ist und somit keine nichttrivialen Normalteiler hat. Wegen $1 < 5 < |G|$ kann ebenso $\nu_5 = 1$ ausgeschlossen werden.

<u>also</u>: $\nu_5 = 76$ und $\nu_{19} = 20$

Allgemein gilt: Ist G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl, dann gibt es in G genau $(p-1)$-mal soviele Elemente der Ordnung p wie Untergruppen der Ordnung p (denn jede solche Untergr. ist aufgrund der Primzahlordnung zyklisch und enthält $\varphi(p) = p-1$ Elemente der Ordnung p, und umgekehrt ist jedes $g \in G$ mit $\mathrm{ord}(g) = p$ in genau einer Untergr. der Ordn. p von G enthalten, nämlich in $\langle g \rangle$). <u>also</u>: In G gibt es $4 \cdot 5 = 4 \cdot 76 = 304$ Elemente der Ordnung 5 und

$18 \cdot \nu_{19} = 18 \cdot 20 = 360$ Elemente der Ordn. 19

$\Rightarrow |G| \geq 304 + 360 = 664$ ↯ da $|G| = 380$

Die Annahme, dass eine einfache Gruppe der Ordnung 380 existiert, war also falsch. □

mögliche Übungen:

- Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 56 (oder 12).
- etwas schwieriger: F17T2A1

Erinnerung: Sei G eine Gruppe, und seien $U, N \leq G$.

G ist inneres direktes Produkt von U und N

$\Leftrightarrow$ (1) $N, U \trianglelefteq G$ (2) $N \cap U = \{e\}$ (3) $G = NU$

bekannt: Unter diesen Voraussetzungen gilt $G \cong N \times U$.

...e Gruppe
... in G genau
...dnung p
... (denn jede
...rimzahl-
...(p) = p-1
...gebracht ist
... genau einer
...en, nämlich
... es 4 v5
...ung 5 und.

H14T3A1 Sei G eine Gruppe der Ordnung 2014. Zeigen Sie, dass es einen zyklischen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ der Ordnung 1007 gibt.

Wiederholung zum Komplexprodukt:
Sei G eine Gruppe und $U, V \leq G$.

- Das Komplexprodukt UV ist im Allgemeinen keine Untergruppe von G, aber:
- Gilt $U \trianglelefteq G$ oder $V \trianglelefteq G$, dann folgt $UV \leq G$.
- Aus $U \leq G$ und $V \trianglelefteq G$ folgt sogar $UV \trianglelefteq G$.

Primfaktorzerlegung von 2014:

$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$

Für $p \in \{2, 19, 53\}$ sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G.

3. Sylowsatz $\Rightarrow \nu_{53} \mid 2 \cdot 19 \Rightarrow \nu_{53} \in \{1, 2, 19, 38\}$, außerdem $\nu_{53} \equiv 1 \ (53)$, $2, 19, 38 \not\equiv 1 \ (53) \Rightarrow \nu_{53} = 1$

$\nu_{19} \mid 2 \cdot 53 \Rightarrow \nu_{19} \in \{1, 2, 53, 106\}$

außerdem $\nu_{19} \equiv 1 \bmod 19$, $2 \not\equiv 1 \bmod 19$, $53 \equiv 15 \not\equiv 1 \bmod 19$, $106 \equiv 2 \cdot 53 \equiv 2 \cdot 15 \equiv 30 \equiv 11 \not\equiv 1 \bmod 19 \Rightarrow \nu_{19} = 1$.

Sei P die einzige 19- und Q die einzige 53-Sylowg. Sei $U = PQ$.

Auf Grund des 2. Sylowsatzes folgt aus $\gamma_{19} = 1$ und $\gamma_{53} = 1$, dass P und Q Normalteiler von G sind. Damit ist auch das Komplexprodukt $U = PQ$ ein Normalteiler von G.

noch z.Zg.: $|U| = 1007$ und U ist zyklisch

Beh.: U ist inneres direktes Produkt von P und Q

zu überprüfen: (1) $P \trianglelefteq U$, $Q \trianglelefteq U$

(2) $P \cap Q = \{e\}$

zu (1) folgt aus $P \trianglelefteq G$ und $Q \trianglelefteq G$

zu (2) folgt aus Teilerfremdheit von $|P| = 19$ und

$|Q| = 53$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Aus der Beh. folgt $U \cong P \times Q$.

Da $|P| = 19$ eine Primzahl ist, gilt $P \cong \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$.

Da $|Q| = 53$ " " " " " $Q \cong \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$.

$\Longrightarrow U \cong \mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$

Wegen ggT$(19, 53) = 1$ folgt daraus nach dem Chinesischen Restsatz $U \cong \mathbb{Z}/(19 \cdot 53)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/1007\mathbb{Z}$. Also ist U zyklisch und von Ordnung 1007.

□

Übung: • F23T3A3

• Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 99. [Ergebnis: $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$]

F25T2A4 Sei G eine Gruppe der Ordnung 2025 und seien U_5, U_5' zwei verschiedene 5-Sylowgruppen von G.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der 5-Sylowgruppen von G.

Sei r_5 die Anzahl der 5-Sylowg. von G.

Primfaktorzerlegung von 2025: $2025 = 81 \cdot 25 = 3^4 \cdot 5^2$

3 Sylowsatz $\Rightarrow n_5 \mid 3^4 \Rightarrow n_5 \in \{1, 3, 9, 27, 81\}$

außerdem $n_5 \equiv 1 \ (5)$, $3 \not\equiv 1 \ (5)$, $9 \equiv 4 \not\equiv 1 \ (5)$,

$27 \equiv 2 \not\equiv 1 \ (5) \Rightarrow n_5 \in \{1, 81\}$

Da es lt. Angabe zwei verschiedene 5-Sylowgr. in G gibt, ist $n_5 = 1$ ausgeschlossen. Also ist $n_5 = 81$.

(b) Sei $U = \langle U_5 \cup U_5' \rangle$. Zeigen Sie, dass $U = G$ gilt.

Hinweis: Wenn V eine Untergr. von G mit $U_5 \subsetneq V \subsetneq G$ ist, wieviele 5-Sylowgruppen hat V dann?

Sei V eine Untergr. von G mit $U_5 \subsetneq V \subsetneq G$ und n_5' die Anzahl der 5-Sylowgruppen von V

Lagrange $\Rightarrow |V| \mid |G| \Rightarrow |V| \mid 2025$

$\Rightarrow |V| = 3^i 5^j$ mit $i \in \{0,\dots,4\}$, $j \in \{0,1,2\}$

$U_5 \subseteq V \Rightarrow |U_5| = 25$ ist Teiler von $|V|$

$\Rightarrow j = 2$ Im Fall $i = 0$ wäre $|V| = 25 = |U_5|$

also $U_5 = V$ ein Widerspruch zu $U_5 \subsetneq V$, und

im Fall $i = 4$ wäre $|V| = 3^4 \cdot 5^2 = |G|$ und

$V = G$ ein Widerspruch zu $V \subsetneq G$.

Also: $i \in \{1,2,3\}$ und $j = 2$

3. Sylowsatz $\Rightarrow n_5' \mid 3^i \Rightarrow n_5' \in \{1,3,9,27\}$

außerdem $n_5' \equiv 1 \ (5)$, $3, 9, 27 \not\equiv 1 \ (5) \Rightarrow$

$n_5' = 1$.

25

$\in \{0,1,2\}$

$= |V|$

$= 25 = |U_5|$

$U_5 \subsetneq V$ und

$|G|$ und

$\in \{1,3,9,27\}$

$1 \pmod 5 \Rightarrow$

Wegen $U_5 \subsetneq U_5 \cup U_5'$ gilt $U_5 \subsetneq \langle U_5 \cup U_5' \rangle = U$. Angenommen $U \neq G$.
Dann würde $U_5 \subsetneq U \subsetneq G$ gelten.
Wie oben gezeigt, hat dann U genau eine 5-Sylowgruppe. Wegen $|U_5| \mid |U|$ und $|U| \mid |G|$ gilt $5^2 \mid |U|$ aber $5^3 \nmid |U|$, d.h. auch die 5-Sylowgruppen von U sind genau die Untergruppen der Ordnung 25.
Mit U_5 und U_5' enthält U zwei solche Untergr. $\not\equiv$ zu $\nu_5' = 1$. Also gilt $U = G$.

□