H23 T1 A3

(a) G einfache Gruppe, $|G| > 2$, X endliche Menge, auf der G operiert, $n = |X|$,
$\rho : G \to S_n$ Homomorphismus, der durch die Operation gegeben ist. Dann gilt $\rho(G) \subseteq A_n$.
(bereits erledigt)

(b) Sei G eine einfache, nicht-abelsche Gruppe. Sei H eine Untergruppe von G mit $n = (G:H) \geq 2$. Zeigen Sie: G ist isomorph zu einer

Untergruppen von A_n, und es ist $n \geq 5$.

Wir betrachten die Operation von G auf G/H gegeben durch $\circ : G \times G/H \to G/H$, $(g, kH) \mapsto (gk)H$. Sei $\rho : G \to S_n$ ein zugehöriger Homomorphismus und $N = \ker(\rho)$.

Jede Gruppe der Ordnung ≤ 2 ist abelsch (sogar zyklisch, da 2 eine Primzahl und jede zyklisch ist). Da G nicht-abelsch ist, muss $|G| > 2$ sein. G ist einfach

$\xRightarrow{\text{Teil (a)}}$ $\rho(G) \leq A_n$ Ist ρ injektiv, dann ist $\rho(G)$

eine zu G isomorphe Untergruppe von A_n.

Ang. φ ist nicht injektiv. Dann gilt $N \neq \{e_G\}$.

Da N (als kernerer Hom.) ein Normalteiler von G und G einfach ist, muss somit $N = G$ gelten.

Dann gilt $\varphi(g) = id$ für alle $g \in G$.

Damit bildet auch der durch $\circ$ geg. Homomorphismus $G \to Per(G/H)$, $g \mapsto (kH \mapsto gkH)$ jedes $g \in G$ auf die Identität ab. Es gilt für alle $g \in G$ somit insb.

$gH = g \circ H = id_{G/H}(H) = H \Rightarrow G/H = \{H\}$, $(G:H) = 1$

↯ zu $n = (G : H) \geq 2$

Ang. $n \leq 4$. $\Rightarrow n \in \{2, 3, 4\}$

Betrachte zunächst den Fall $n \in \{2, 3\}$. Dann ist G isomorph zu einer Untergr. von A_2 oder A_3. Aber A_2 und A_3 sind abelsch, und somit wäre auch G abelsch.

Sei nun $n = 4$. Dann ist G isomorph zu einer Untergruppe von A_4. Der Fall $G = A_4$ ist ausgeschlossen, da A_4 nicht einfach ist (denn $V_4 \trianglelefteq A_4$ ist ein nichttriv. Normalteiler).

Lagrange $\Rightarrow |G|$ ist echter Teiler von $|A_4| = 12$, also $|G| \in \{1, 2, 3, 6\}$. Dabei ist $|G| = 6$ ausgeschlossen, da

A_4 bekanntlich keine Untergp. der Ordnung 6 besitzt. $|G| = 1, 2$ ist ausgeschl. wegen $|G| = 2$ (z.o.) Als Gruppe der Ordnung 3 wäre G zyklisch, somit auch abelsch, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(c) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 80 gibt

Ang. G ist eine einfache Gruppe der Ordnung 80. Sei P eine 2-Sylowgruppe von G, also eine Untergruppe von G mit $|P| = 16$. $(80 = 2^4 \cdot 5)$

Ang. G ist abelsch. Dann wäre P ein nichttriv. Normalteiler von G ($P \neq \{e_G\}$ und $P \neq G$ wg. $1 < |P| < |G|$). Somit wäre G keine einfache Gruppe ↯

also: G ist nicht-abelsch Teil (B).

$(G:P) = \frac{80}{16} = 5 \rightarrow$ G ist isomorph zu einer Untergruppe von A_5 $\overset{\text{Lagrange}}{\Rightarrow}$

$|G| = 80$ ist Teiler von $|A_5| = 60$ ↯ □

Wichtige Sätze über Gruppenoperationen

Sei G eine Gruppe, X eine Menge und $\cdot : G \times X \to X$ eine Gruppenoperation.

- Beziehung zwischen Bahnlänge und Stabilisator

  Ist G endlich, dann gilt $(G : G_x) = |G(x)|$ für alle $x \in X$.
  (Grund : Existenz einer Bijektion $G/G_x \to G(x)$, $gG_x \mapsto g \cdot x$)

- Bahngleichung für Gruppenoperationen

  Ist X endlich, $F \subseteq X$ die Fixpunktmenge der Operation und $R \subseteq X$ ein Repräsentantensystem der Bahnen mit mehr als einem Element, dann gilt

$$|X| \quad = \quad |F| + \sum_{x \in R} (G : G_x).$$

  (Grund : Die Menge X ist disjunkte Vereinigung der Bahnen. Dabei liefern die Fixpunkte die einelementigen Bahnen.)

wichtiger Spezialfall der Bahngleichung: Die Klassengleichung

- Wendet man die Bahngleichung auf die Operation einer endlichen Gruppe G auf sich selbst durch Konjugation an, so erhält man die Klassengleichung. Die Bahnen sind dabei die Konjugationsklassen der Gruppe G. Die Konjugationsklasse eines Elements $h \in G$ ist gegeben durch

$$[h] \quad = \quad \{ghg^{-1} \mid g \in G\}.$$

- Die Fixpunkte der Operation sind genau die Elemente des Zentrums $Z(G) = \{g \mid \forall\, h \in G : gh = gh\}$.
- Die Klassengleichung hat damit die Form

$$|G| \quad = \quad |Z(G)| + \sum_{g \in R} (G : G_x) \quad ,$$

wobei $R \subseteq G$ ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen mit mehr als einem Element bezeichnet.

Die Klassengleichung der symmetrischen Gruppen

- Im Fall $G = S_n$ sind die Konjugationsklassen gegeben durch die Zerlegungstypen der Permutationen.
- Für alle $n \geq 3$ gilt $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$.
- Im Fall $n = 4$ lautet die Klassengleichung beispielsweise

$$24 \quad = \quad |S_4| \quad = \quad 1 + 6 + 8 + 6 + 3.$$

  Dabei entsprechen die einzelnen Summanden dem Zentrum, den 2-Zyklen, den 3-Zyklen, den 4-Zyklen, und den Doppeltranspositionen.
- Im Fall $n = 5$ lautet die Klassengleichung entsprechend

$$120 \quad = \quad |S_5| \quad = \quad 1 + 10 + 20 + 30 + 24 + 15 + 20.$$

  Hier entsprechen die Summanden dem Zentrum, den 2-, 3-, 4- und 5-Zyklen sowie den Zerlegungstypen $(2, 2)$ und $(3, 2)$.

Ordnung 6
ld wegen
des Ord-
nicht auch
oraussetzung
einfache
H
ppe der
2-Sylowgruppe
ppe von G
$= 2^4 \cdot 5$)

H26T1A4

Sei G eine endliche Gruppe, H eine Untergruppe von G und U die Vereinigung aller zu H konjugierten Untergruppen, d. h.

$$U = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$$

(a) Sei $R = \{g_1, \ldots, g_n\}$ ein Repräsentantensystem von G/H, mit $n = (G : H)$.

Zeigen Sie: $U \setminus \{e\} = \bigcup_{i=1}^{n} (g_i H g_i^{-1} \setminus \{e\})$

„$\supseteq$" Sei h ein Element der Vereinigung rechts, d. h. $h \in g_i H g_i^{-1} \setminus \{e\}$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt insb. $h \in gHg^{-1}$ und somit $h \in U$. Dabei ist $h = e$ nach Voraus-

setzung ausgeschlossen, also $k \in U \setminus \{e\}$.

„$\subseteq$" Sei $k \in U \setminus \{e\}$. $k \in U \Rightarrow \exists g \in G$ mit $k \in gHg^{-1}$. Da R ein Repr.-system von G/H ist, enthält gH ein Element aus R, d.h. $g_i \in gH$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. $\Rightarrow \exists h' \in H$ mit $g_i = gh'$ bzw. $g = g_i h'^{-1}$

$k \in gHg^{-1} \Rightarrow \exists h' \in H$ mit $k = gh'g^{-1}$

$\Rightarrow k = (g_i h^{-1}) h' (g_i h^{-1})^{-1} = g_i \underbrace{h^{-1} h' (h^{-1})^{-1}}_{\in H} g_i^{-1}$

$\Rightarrow k \in g_i H g_i^{-1}$ außerdem: $k \neq e$.

$\Rightarrow k \in g_i H g_i^{-1} \setminus \{e\}$ Also ist k in der Vereinigung auf der rechten Seite enthalten.

(b) Zeigen Sie: $|U| \leq |G| - (G:H) + 1$

Da $g_i H g_i^{-1}$ für $1 \leq i \leq n$ jeweils isomorph zu H ist (als zu H konj. Untergruppe), gilt $|g_i H g_i^{-1}| = |H|$ für $1 \leq i \leq n$.

$$\rightarrow |U \setminus \{e\}| \overset{(a)}{=} \left| \bigcup_{i=1}^{n} (g_i H g_i^{-1} \setminus \{e\}) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |g_i H g_i^{-1} \setminus \{e\}| = \sum_{i=1}^{n} (|g_i H g_i^{-1}| - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (|H| - 1)$$

$|A_1 \cup \dots \cup A_m| \leq \sum_{k=1}^{m} |A_k|$ falls $A_1, \dots, A_m$ bel. endl. Mengen

$$= n \cdot (|H| - 1) = (G:H)(|H| - 1)$$

$\Rightarrow |U| = |U \setminus \text{ref}| + 1 = (G:H)(|H|-1) + 1$

$= (G:H) \cdot |H| - (G:H) + 1$

$= |G| - (G:H) + 1$

↳ Lagrange

(c) Zeigen Sie: Enthält H mindestens ein Element aus jeder Konjugationsklasse von G, dann folgt $H = G$.

Beh. Es gilt $G \subseteq U$ (und somit $G = U$)

Sei $g \in G$. Nach Voraussetzung enthält H ein Element der Konjugationsklasse $[g] = \{kgk^{-1} \mid k \in G\}$

$\Rightarrow \exists\, k \in G$, so dass $h = kgk^{-1}$ in H liegt.

$\Rightarrow g = k^{-1} h (k^{-1})^{-1} \Rightarrow g \in U$

Teil (b) $\Rightarrow |G| \leq |G| - (G:H) + 1 \Rightarrow (G:H) \leq 1$

$\Rightarrow (G:H) = 1 \Rightarrow G = H$