Definition der Gruppenoperationen

Definition

Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Gruppenoperation von G auf X ist eine Abbildung $\alpha : G \times X \to X$ mit den Eigenschaften

$$\alpha(e_G, x) = x \qquad \text{und} \qquad \alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$$

für alle $g, h \in G$ und $x \in X$.

An Stelle von $\alpha(g, x)$ verwendet man häufig auch die Infix-Schreibweise $g \cdot x$, wobei $\cdot$ das Symbol für die Gruppenoperation ist.

Bahnen und Stabilsatoren

Definition

Sei G eine Gruppe, X eine Menge und $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ eine Gruppenoperation.

(i) Für jedes $x \in X$ nennt man $G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ die Bahn von x.

(ii) Die Menge $\mathcal{B} = \{G(x) \mid x \in X\}$ der Bahnen bildet eine Zerlegung von X. Gibt es nur eine Bahn, dann bezeichnet man die Operation als transitiv.

(iii) Die Elemente $x \in X$ mit $G(x) = \{x\}$ heißen Fixpunkte der Gruppenoperation.

(iv) Für jedes $x \in X$ ist $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ eine Untergruppe von G. Man nennt sie den Stabilisator von G.

Gruppenoperationen und Homomorphismen

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert.

- Jedem Gruppenelement $g \in G$ kann eine Permutation $\tau_g \in \mathrm{Per}(X)$ zugeordnet werden, die durch $\tau_g(x) = g \cdot x$ für alle $x \in X$ definiert ist.
- Die Abbildung $\phi : G \to \mathrm{Per}(X)$, $g \mapsto \tau_g$ ist dann ein Gruppenhomomorphismus.
- Ist X endlich mit $n = |X|$, dann gilt $\mathrm{Per}(X) \cong S_n$. Die Abbildung ϕ liefert dann auch einen Homomorphismus $\psi : G \to S_n$.
- Ist G eine Gruppe der endlichen Ordnung n, dann erhält durch die Operation von G auf $X = G$ durch Linkstranslation einen Homomorphismus $\psi : G \to S_n$, der darüber hinaus injektiv ist. Die Gruppe G ist dann isomorph zu einer Untergruppe von S_n, nämlich $\psi(G)$. Dies ist der Inhalt des Satzes von Cayley.

Wichtige Beispiele für Gruppenoperationen

- Operation von S_n auf $M_n = \{1, 2, ..., n\}$ $(n \in \mathbb{N})$
  durch $\sigma \cdot k = \sigma(k)$ für $\sigma \in S_n$, $k \in M_n$
- Operation einer Gruppe G auf sich selbst durch Linkstranslation
  durch $g \cdot h = gh$ für $g, h \in G$
- Operation einer Gruppe G auf sich selbst durch Konjugation
  durch $g \cdot h = ghg^{-1}$ für $g, h \in G$
- Operation einer Gruppe G auf der Menge G/H der Linksnebenklassen einer Untergruppe $H \leq G$
  durch $g \cdot (kH) = (gk)H$ für $g, k \in H$
- Operation einer endlichen Gruppe G auf der Menge $\mathcal{U}$ ihrer p-Sylowgruppen, für eine Primzahl p
  durch $g \cdot P = gPg^{-1}$

konkrete Beispiele für Gruppenoperationen

li) $G = S_n$ $(n \geq 2)$, $X = \Gamma_n = \{1, \ldots, n\}$

Operation von G auf X gegeben durch

$\sigma \circ k = \sigma(k) \quad \forall \sigma \in G, k \in \Gamma_n$

$(1\,k) \circ 1 = k$ (für $2 \leq k \leq n$), $\mathrm{id} \circ 1 = 1$

$\Rightarrow$ Die gesamte Menge Γ_n liegt in der Bahn $G(1)$. $\Rightarrow G(1) = \Gamma_n$ d.h. die Operation ist transitiv.

Der Stabilisator von $k \in M_n$ ist jeweils gegeben durch $G_k = \{\sigma \in G \mid \sigma(k) = k\}$

Bsp: $(S_4)_2 = \{id, (13), (14), (34), (134), (143)\}$

(ii) G = Untergruppe von S_7 gegeben durch $G = \langle \sigma \rangle$ mit $\sigma = (137)(24)(56)$

Betrachte die Operation von G auf M_7 gegeben durch $\sigma \circ k = k \quad \forall \sigma \in G, k \in M_7$

Bahnen: $G(1) = \{1, 3, 7\} = G(3) = G(7)$

$G(2) = \{2, 4\} = G(4)$, $G(5) = \{5, 6\}$

$= G(6)$

Stabilisatoren: $G_1 = \{id, \sigma^3\} = \langle \sigma^3 \rangle = G_3 = G_7$

$G_2 = \langle \sigma^2 \rangle = \{id, \sigma^2, \sigma^4\} = G_4 = G_5 = G_6$

Aufgaben zu konkreten vorgegebenen Gruppenoperationen: F20T1A2, F20T3A3, H20T2A2, F23T3A1, F23T1A4

H26T2A4 Sei $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ und G eine Gruppe, die transitiv auf M_n operiert.

(7) Sei $U \leq G$ eine Untergruppe, deren Index $(G : U)$ teilerfremd zu n ist. Zeigen Sie, dass auch U

transitiv auf Γ_n operiert.

Hinweis: Sei G_1 der Stabilisator von 1. Betrachten Sie die Indizes in den Ketten $G_1 \cap U \leq G_1 \leq G$ und $G_1 \cap U \leq U \leq G$, und drücken Sie $|U(1)|$ durch G_1 und U aus.

Nach dem Satz von Lagrange gilt

$$|G| = (G : G_1) \cdot |G_1| = (G : G_1) \cdot (G_1 : G_1 \cap U) \cdot |G_1 \cap U|$$

und $|G| = (G : U) \cdot |U| = (G : U) \cdot (U : G_1 \cap U) \cdot |G_1 \cap U|$

$$\Rightarrow (G : G_1) \cdot (G_1 : G_1 \cap U) \cdot |G_1 \cap U| = (G : U)(U : G_1 \cap U) \cdot |G_1 \cap U|$$

$$\Rightarrow (G : G_1) \cdot (G_1 : G_1 \cap U) = (G : U) \cdot (U : G_1 \cap U) \quad (*)$$

Da die Operation von G auf M_n transitiv ist, gilt $(G:G_1) = |G(1)| = |M_n| = n$. Außerdem gilt $|U(1)| = (U:U_1)$, wobei U_1 den Stabilisator von 1 bzgl. der eingeschränkten Operation $\circ : U \times M_n \to M_n$, $(u,k) \mapsto u \cdot k$ bezeichnet.

Beh.: $U_1 = G_1 \cap U$

„$\subseteq$" klar, da $U_1 \leq U$ (als Stabilisator), und $U_1 \subseteq G_1$, da jedes $u \in U_1$ die Gleichung $u \cdot 1 = 1$ erfüllt

und somit auch in G_1 liegt

„2" Sei $u \in G_1 \cap U$. $\Rightarrow u \in U$, und

$u \cdot 1 = 1 \Rightarrow u \in U_1$ ($\Rightarrow$ Beh.)

<u>also</u>: $|U(1)| = (U : G_1 \cap U)$

einsetzen in (*) $\Rightarrow$

$n \cdot (G_1 : G_1 \cap U) = (G : U) \, |U(1)|$

$\Rightarrow n \mid (G:U) \cdot |U(1)|$

n und $(G:U)$ sind teilerfremd $\Rightarrow$

$n \mid |U(1)| \Rightarrow |U(1)| \geq n$ $\quad U(1) \subseteq M_n \Rightarrow |M_n| = n$

$U(1) = M_n$ Die Bahn von 1 unter U enthält die gesamte Menge n, also ist die Operation

von U auf M_n transitiv. □

Erinnerung: Jede Operation einer Gruppe G auf einer Menge X liefert einen Gruppenhomomorphismus $\phi: G \to \mathrm{Per}(X)$. Ist $\cdot : G \times X \to X$ die Operation, dann liefert jedes $g \in G$ durch $\tau_g: X \to X$, $x \mapsto g \cdot x$ eine Permutation von X, und der Hom. ϕ ist dann gegeben durch $\phi(g) = \tau_g \ \forall g \in G$.

H26T3A3 (a) Sei G eine endliche einfache Gruppe und p eine Primzahl (mit $p \mid |G|$). Zeigen Sie, dass es keine Untergr. H mit $1 < (G:H) < p$ gibt (Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Operation von

G auf der Menge G/H der Linksnebenklassen von H.) Ang. ein solches H existiert.
Wir betrachten die Operation $\circ : G \times G/H \to G/H$ geg. durch $g \circ (kH) = (gk)H$ für alle $g, k \in G$.
Diese Operation liefert einen Homomorphismus $\phi : G \to \mathrm{Per}(G/H)$, der jedes $g \in G$ jeweils auf die Permutation $\tau_g \in \mathrm{Per}(G/H)$ geg. durch $\tau_g(kH) = g \circ (kH) = (gk)H$ $\forall k \in G$ abbildet. Es ist $N = \ker(\phi)$ ein Normalteiler von G (als Kern eines Hom.)
G einfach $\Rightarrow N = \{e_G\}$ oder $N = G$

1. Fall: $N = \{e_G\}$ Dann ist ϕ injektiv. $\Rightarrow$ G ist isomorph zur Untergr. $\phi(G)$ von $\mathrm{Per}(G/H)$ Lagrange $\Rightarrow$ $|\phi(G)| = |G|$ ist ein Teiler von $|\mathrm{Per}(G/H)|$ Setzen wir $k = (G:H) = |G/H|$, dann gilt $|\mathrm{Per}(G/H)| = k!$

$\Rightarrow |G|$ ist ein Teiler von $k!$ $\overset{p \mid |G|}{\Longrightarrow}$ $p \mid k!$

aber: $k < p \Rightarrow p$ ist kein Teiler von $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$ ↯

2. Fall: $N = G$ Dann gilt $\ker(\phi) = G$, d.h.

$\phi(g) = \mathrm{id}_{G/H}$ $\forall g \in G$ $\Rightarrow$ $g \cdot H = \tau_g(H) =$

$\phi(g)(H) = \mathrm{id}_{G/H}(H) = H$ $\forall g \in G$ $\Rightarrow$

$gH = geH = g \cdot (eH) = g \cdot H = H \quad \forall g \in G$

$\Rightarrow$ H ist einzige Linksnebenklasse von H, d.h.

$G/H = \{H\}$ und $(G:H) = |\{H\}| = 1$ $\lightning$ zu $(G:H) > 1$

$\lightning$

Übung: H19T3A3 □

H23T1A3

(a) Sei G eine endliche einfache Gruppe mit $|G| > 2$, die transitiv auf einer endlichen Menge X operiert. Sei $n = |X|$ und $\rho : G \to S_n$ ein zur Operation korrespondierender Homomorphismus. Zeigen Sie, dass $\rho(G) \subseteq A_n$ gilt.

Betrachten den Hom. $\chi : G \to \{\pm 1\}$ gegeben durch $\chi = \text{sgn} \circ \rho$. Als Kern eines Hom. ist $N = \ker(\chi)$ ein Normalteiler von G.

G einfach $\Rightarrow N = \{e_G\}$ oder $N = G$

Angenommen, es gilt $\rho(G) \leq A_n$.

1. Fall: $N = \{e_G\}$

Dann ist χ injektiv und G somit isomorph zur Untergr. $\chi(G)$ von $\{\pm 1\}$. $\Rightarrow |G| = |\chi(G)| \leq |\{\pm 1\}| = 2$ ↯ zu $|G| > 2$

2. Fall: $N = G$ Dann gilt $\ker(\chi) = G$,

also $\chi(g) = 1 \; \forall g \in G. \Rightarrow \operatorname{sgn}(\rho(g)) = 1$

$\forall g \in G \Rightarrow \rho(g) \in A_n \; \forall g \in G \Rightarrow \rho(G) \subseteq A_n$ ↯