Erinnerung: Sei G eine Gruppe.

Normalteiler von G = Untergruppe $N \leq G$ mit der Eigenschaft $gN = Ng \quad \forall g \in G$.

äquivalente Bedingungen:

(1) $gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$ (2) $gNg^{-1} \subseteq N \quad \forall g \in G$

(3) $G/N = N \backslash G$

Menge der Linksnebenkl. Menge der Rechtsnebenkl.

Wichtige Regel:

Für alle $g, h \in G$ gilt die Äquivalenz

$$gN = hN \iff h \in gN \iff g \in hN$$

(Zwei Linksnebenkl. sind entweder disj. oder gleich.)

Def.: Eine Teilmenge $R \subseteq G$ heißt Repräsentantensystem von G/N, wenn jede Linksnebenklasse von N genau ein Element aus R enthält.

Bsp.: $G = (\mathbb{Z}, +)$, $N = n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ (mit $n \in \mathbb{N}$)

Dann ist $R = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ein Repräsentantensystem von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Regeln für Normalteiler:

(1) Für jede Gruppe G sind $\{e_G\}$ und G Normalteiler (die sog. trivialen Normalteiler), d.h. $\{e_G\} \trianglelefteq G$ und $G \trianglelefteq G$. Ist $G \neq \{e_G\}$ und sind $\{e_G\}$ und G die einzigen Normalteiler, dann nennt man G eine einfache Gruppe.
(Beispiele: $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ falls p Primzahl
A_n für $n = 3$ oder $n \geq 5$)

(2) G Gruppe, $N \leq G$, $(G:N) = 2 \Rightarrow N \trianglelefteq G$

(Die Umkehrung ist falsch. Bsp.: $V_4 \trianglelefteq A_4$, $V_4 \trianglelefteq S_4$ aber $(A_4 : V_4) = 3$, $(S_4 : V_4) = 6$)

(3) G abelsch, $U \leq G \Rightarrow U \trianglelefteq G$

(4) Kerne von Gruppenhom. sind Normalteiler.

(5) G endl. Gpp., p Primteiler, P einzige p-Sylowgr. von $G \Rightarrow P \trianglelefteq G$

(6) G Gruppe, $d \in \mathbb{N}$, U einzige Untergr. von G mit $|U| = d \Rightarrow U \trianglelefteq G$ (Grund: Für jedes $g \in G$ hat gUg^{-1} genauso viele Elemente wie U.)

Definition der Faktorgruppen

Proposition

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G. Dann gibt es auf der Menge G/N eine eindeutig bestimmte Verknüpfung $\cdot$ mit der Eigenschaft

$$(gN) \cdot (hN) \quad = \quad (gh)N \qquad \text{für alle} \quad g, h \in G.$$

Satz

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler.Dann ist die Menge G/N der Linksnebenklassen mit der Verknüpfung $gN \cdot hN = (gh)N$ eine Gruppe, die sogenannte Faktorgruppe von G modulo N. Die Abbildung $\pi_N : G \to G/N$, $g \mapsto gN$ ist ein Epimorphismus von Gruppen, der sog. kanonische Epimorphismus.

Beispiel für eine Faktorgruppe

$G = S_4$, $N = V_4$

Es gilt $|G/N| = (G:N) = \frac{|G|}{|N|}$

$= \frac{24}{4} = 6$.

Beh. $R = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\} \subseteq S_4$ ist ein Repräsentantensystem von G/N

Beweis: Ang. $\sigma, \tau \in R$ liefern dieselbe Nebenklasse von N, d.h. $\sigma N = \tau N$.

$\Rightarrow \tau \in \sigma N \Rightarrow \exists\, \rho \in N : \tau = \sigma\rho$

$\Rightarrow \rho = \sigma^{-1}\tau \in N \; (= V_4)$

Es gilt $(\sigma^{-1}\tau)(4) = \sigma^{-1}(4) = 4$, außerdem

$\sigma^{-1}\tau = \rho \in \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$\Rightarrow \rho = id \Rightarrow \sigma = \tau$ Also liefern die 6 Elemente aus R 6 verschiedene Elemente von G/N. Wegen $|G/N| = 6$ sind dies alle Elemente.

$(\Rightarrow$ Beh.$) \Rightarrow G/N = \{ id \circ N = N, (12)N, (13)N, (23)N, (123)N, (132)N \}$

$(12)N \circ (13)N = ((12)\circ(13))N = (132)N$

$(34)N \circ (142)N = ((34)\circ(142))N = (1342)N$

$(1342) \circ (12)(34) = (1)(23)(4) = (23)$

(b) Bestimmen Sie alle Elemente endli-

+, außerdem
4), (14)(23)}
liefern die 6
mente von G/N.
lemente.
N, (12)N, (13)N

N = (132)N
142))N =

23)(4) = (23)

$\Rightarrow (1342)N = (23)N$

also: $(34)N \circ (142)N = (23)N$

Übung: Bestimmen Sie die vollständige Verknüpfungstabelle von G/N.
(leicht)

Bem: In jeder Faktorgruppe G/N ist $N = eN$ das Neutralelement, denn:
$N \circ N = eN \circ eN = (ee)N = eN = N$
In jeder Gruppe H ist e_H das einzige Element h mit $h^2 = h$.

F13T2A1

(a) Zeigen Sie, dass jedes Element in der Faktorgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ endliche Ordnung hat.

(b) Bestimmen Sie alle Elemente endlicher Ordnung in den Gruppen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

zu (a) Sei $\bar{r} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$:

$\bar{r} = r + \mathbb{Z} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$

mit $\bar{r} = \frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ Es gilt $b \cdot \bar{r} =$

$6\left(\frac{a}{6}+\mathbb{Z}\right) = 6\cdot\frac{a}{6}+\mathbb{Z} = a+\mathbb{Z}$ Wegen $a \in$

$0+\mathbb{Z}$ gilt $a+\mathbb{Z} = 0+\mathbb{Z}$. $\Rightarrow 6\cdot\bar{r} = 0+\mathbb{Z} = 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$

Also ist $\bar{r}$ ein Element endlicher Ordnung (und die Ordnung ist ein Teiler von 6).

zu (b) Sei $E \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die Teilmenge der Elemente endlicher Ordnung in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Beh: $E = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

„$\supseteq$" Dass jedes Element in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ endl. Ordnung hat, kann wie in Teil (a) nachgerechnet werden.

„$\subseteq$" Sei $\bar{r} \in E$. $\bar{r} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{R}$ mit $\bar{r} = r+\mathbb{Z}$

$\bar{r}$ hat endl. Ordnung. $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $n\cdot\bar{r} = 0_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$

$n(r+\mathbb{Z}) = 0+\mathbb{Z} \Rightarrow nr+\mathbb{Z} = 0+\mathbb{Z} \Rightarrow$

$nr \in 0+\mathbb{Z} \Rightarrow nr \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z} : nr = a$

$\Rightarrow r = \frac{a}{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \bar{r} = r+\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

(Überlegung: Hat $\sqrt{2}+\mathbb{Q}$ endl. Ordnung in $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$?

Ang. ja $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n(\sqrt{2}+\mathbb{Q}) = 0_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} \Rightarrow$

$n\sqrt{2}+\mathbb{Q} = 0+\mathbb{Q} \Rightarrow n\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : n\sqrt{2} = r$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{r}{n} \in \mathbb{Q}$ ↯]

<u>Beh.</u> Das einzige Element endlicher Ordnung in $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist $0_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$.

denn: In jeder Gruppe hat das Neutralelement die endl. Ordnung 1. $\Rightarrow 0_{R/Q}$ hat endl. Ordnung.

Sei $\bar{r} \in R/Q$ ein beliebiges Element endlicher Ordnung, $\bar{r} = r + Q$ mit $r \in R$. $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit

$n \cdot \bar{r} = 0_{R/Q} \Rightarrow n(r+Q) = 0+Q \Rightarrow$

$nr + Q = 0 + Q \Rightarrow nr \in Q \Rightarrow \exists\, a \in Q$ mit

$nr = a \Rightarrow r = \frac{a}{n} \in Q \Rightarrow \bar{r} = \frac{a}{n} + Q = Q$

$\Rightarrow \bar{r} = 0_{R/Q}$.

Übung (c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ keine zyklische Gruppe ist. (durch Widerspruch)

(d) Zeigen Sie, dass jede endlich erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zyklisch ist.

(e) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Elemente der Ordnung n in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. (Ergebnis: $\varphi(n)$)

Der Homorphiesatz

Proposition

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppen-Homomorphismus und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit $N \subseteq \ker(\phi)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\bar{\phi} : G/N \to H$ mit

$$\bar{\phi}(gN) = \phi(g) \qquad \text{für alle } g \in G.$$

Man nennt $\bar{\phi}$ den durch ϕ induzierten Homomorphismus.

Satz

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann induziert ϕ einen Isomorphismus

$$\bar{\phi} : G/\ker(\phi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(\phi).$$

Ist der Homomorphismus ϕ surjektiv, dann erhält man also einen Isomorphismus $G/\ker(\phi) \cong H$.

Anwendungsbeispiele aus der Vorlesung:

(1) $S_n / A_n \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$ für $n \geq 2$

(2) $GL_n(K) / SL_n(K) \cong K^\times$ für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$

Übung:

(3) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / (2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$

H22T1A1

F14T2A3

Sei G eine Gruppe. Für jedes $h \in G$ betrachten wir das Element $\phi_h \in \mathrm{Aut}(G)$

geg. durch $\phi_h(g) = hgh^{-1}$ $\forall g \in G$.

(a) Zeigen Sie, dass die Teilmenge der inneren Automorphismen $Inn(G) = \{\phi_h \mid h \in G\}$ ein Normalteiler der Automorphismengruppe $Aut(G)$ von G ist.

Zu überprüfen: (1) $e_{Aut(G)} \in Inn(G)$

(2) $\forall \sigma, \tau \in Inn(G) : \sigma \circ \tau, \sigma^{-1} \in Inn(G)$

(3) $\forall \sigma \in Aut(G), \tau \in Inn(G) : \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in Inn(G)$

zu(1) Bekanntlich ist id_G das Neutralelement $e_{Aut(G)}$ der Gruppe $Aut(G)$. (Grund: $id_G \circ id_G = id_G$)
Für alle $g \in G$ gilt $\phi_e(g) = ege^{-1} = g = id_G(g)$.
$\rightarrow \phi_e = id_G \Rightarrow id_G \in Inn(G)$

zu (2) Seien $\sigma, \tau \in \mathrm{Inn}(G) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists h_1, h_2 \in G$ mit $\sigma = \phi_{h_1}$, $\tau = \phi_{h_2}$

Für jedes $g \in G$ gilt

$(\sigma \circ \tau)(g) = (\phi_{h_1} \circ \phi_{h_2})(g) = \phi_{h_1}(h_2 g h_2^{-1})$

$= h_1 (h_2 g h_2^{-1}) h_1^{-1} = (h_1 h_2) g (h_1 h_2)^{-1}$

$= \phi_{h_1 h_2}(g) \Rightarrow \sigma \circ \tau = \phi_{h_1 h_2}$

$\Rightarrow \sigma \circ \tau \in \mathrm{Inn}(G)$

Bestimme die Umkehrabb. von σ

Für alle $g, g_1 \in G$ gilt

$\sigma^{-1}(g) = g_1 \iff g = \sigma(g_1) \iff$

$g = \phi_{h_1}(g_1) = h_1 g_1 h_1^{-1} \iff h_1^{-1} g h_1 = g_1$

$\iff h_1^{-1} g (h_1^{-1})^{-1} = g_1 \iff g_1 = \phi_{h_1^{-1}}(g)$

α:

$n \geq 2$

$\in \mathbb{N}$

$\times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$

des $h \in G$

$\in \mathrm{Aut}(G)$

also: $\alpha^{-1}(g) = \phi_{h^{-1}}(g) \quad \forall g \in G$

$\Rightarrow \alpha^{-1} = \phi_{h^{-1}} \Rightarrow \alpha^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$