Definition der Jordanmatrizen

Definition

Eine Matrix $J \in \mathcal{M}_{n,K}$ heißt Jordanmatrix zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn sie die Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

besitzt.

Definition der Matrizen in JNF

Definition

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ befindet sich in Jordanscher Normalform, wenn sie als Blockmatrix in der Form

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

mit Jordanmatrizen $J_1, ..., J_r$ schreiben lässt. Man bezeichnet diese Teilmatrizen dann als Jordanblöcke der Matrix A.

Beispiel für eine Matrix in JNF

Die folgende Matrix befindet sich in Jordanscher Normalform und besteht aus drei Jordanblöcken.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Jordanblöcke sind 2, 2 und 3, und die Größen der Jordanblöcke sind 3, 1 und 2.

Existenz und Eindeutigkeit der JNF

Satz

Sei K ein Körper.

- Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{M}_{n,K}$. Genau dann ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform, wenn χ_A im Polynomring $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt.
- Zwei Matrizen $J, J' \in \mathcal{M}_{n,K}$ in JNF sind genau dann ähnlich zueinander, wenn sie bis auf Reihenfolge dieselben Jordanblöcke enthalten.
- Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$. Genau dann existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ in JNF vorliegt, wenn χ_ϕ in $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt.

Insbesondere ist also für jedes $n \in \mathbb{N}$ jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ ähnlich zu einer Matrix in JNF.

Eigenschaften der Jordanschen Normalform

Satz

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ und J eine Darstellungsmatrix von ϕ (bezüglich einer geigneten geordneten Basis von V) in Jordanscher Normalform. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von ϕ.

(i) Die geometrische Vielfachheit $\mu_g(\phi, \lambda)$ stimmt überein mit der Anzahl der Jordanblöcke von J zum Eigenwert λ.

(ii) Die algebraische Vielfachheit $\mu_a(\phi, \lambda)$ ist gleich der Summe der Größen aller Jordanblöcke von J zum Eigenwert λ.

(iii) Die Vielfachheit von λ als Nullstelle des Minimalpolynoms μ_ϕ stimmt überein mit der Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ.

H26T1AS (c) L alg. abg. Körper mit $\mathrm{char}(L) = 0$, $k, n \in \mathbb{N}$, $B \in M_{n,L}$ mit $B^k = E$ z.zg: B ist diagonalisierbar

bereits gezeigt: Das Min-pol μ_B ist ein Teiler von $f = x^k - 1 \in L[x]$.

Es genügt z.zg: Ist J eine Matrix in JNF in $M_{n,L}$, die zu B ähnlich ist, dann haben alle Jordan Blöcke in J die Größe 1.

denn: Da L alg. abg. ist, zerfällt das char. Pol. χ_B in $L[x]$ in Linearfaktoren, und somit existiert eine Matrix J in JNF, die ähnlich zu B ist. Enthält diese nur Jordanblöcke der Größe 1, dann ist J eine Diagonalmatrix, und B ist somit diagonalisierbar.

Sei also $J \in M_{n,L}$ in JNF und ähnlich zu B. Zudem hat J nur Jordanbl. der Größe 1, wenn μ_B keine mehrfachen Nullst. hat. Wegen $\mu_B | f$ genügt es z.Zg., dass f in L nur einfache Nullst. hat.

Allgemein gilt: Ein Element $\alpha \in L$ ist genau dann r-fache Nullstelle eines Pol. $g \in L[x] \setminus \{0\}$ (mit $r \in \mathbb{N}_0$), aber keine $(r+1)$-fache Nullstelle (m.a.W. eine Nullst. der Ordnung r), wenn $f^{(k)}(\alpha) = 0$ für $0 \leq k < r$ und $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$ gilt.

Sei nun $\beta \in L$ eine bel. Nullstelle von f. $f' = k \cdot x^{k-1}$

$\Rightarrow f'(\beta) = k \cdot \beta^{k-1}$ Es gilt $f'(\beta) \neq 0$, denn aus $f(\beta) = 0$ folgt $\beta \neq 0$, und aus $\mathrm{char}(L) = 0$ folgt $k \neq 0_L$ (wenn k als Elt. von L betrachtet wird).

$\Rightarrow \beta$ ist einfache Nullstelle von f. $\square$

Übung: F22T1A1

H16T3A1 Sei K ein Körper, V ein endl.-dim. K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$. Wir setzen voraus, dass $\chi_\phi \in K[x]$ über K in Linearfaktoren zerfällt. Sei B eine Jordanbasis von V und $J = M_B(\phi)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (i) Alle Eigenräume von ϕ sind 1-dim.
(ii) Zu jedem Eigenwert gibt es in J genau einen Jordanblock.

(iii) Es gilt $\chi_\phi = \mu_\phi$, wobei μ_ϕ das Min-pol. von ϕ bezeichnet.

„(i) $\Leftrightarrow$ (ii)" Für jeden Eigenwert λ von ϕ ist $n_g = \dim \mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$ gleich der Anzahl der Jordanblöcke in J zum Eigenwert λ. Es gilt also $\dim \mathrm{Eig}(\phi, \lambda) = 1$ genau dann, wenn genau ein Jordanbl. zum Eigenw. λ in J existiert.

„(iii) $\Rightarrow$ (ii)" Wegen $\mu_\phi \mid \chi_\phi$ zerfällt mit χ_ϕ auch μ_ϕ in $K[x]$ in Linearfaktoren. Sei λ ein Eigenwert von ϕ und e die

Das
$\chi_A =$
=
↑ Sarrus
Die E
und wg.
Nullst. d
(6) Zei
form
genau
Es gen
polynom

1 zweifs genau dann, wenn genau ein

Vielfh von λ als Nullst von μ_ϕ. Wegen $\mu_\phi = \chi_\phi$ gilt $e = \mu_a(\phi, \lambda)$. Lt. Vl bedeutet das, dass die Größe des größten Jordanbl zum Eigenw. λ in J gleich der Summe der Größen aller JB zum Eigenw. λ ist. Daraus folgt, dass es in J nur einen JB zum Eigenw. λ gibt, d.h. (ii) ist erfüllt.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Sei λ ein Eigenwert von ϕ. Da es nur einen JB in J zum Eigenw. λ gibt, ist die Größe des größten JB gleich der Summe der Größen aller JB in J. Daraus folgt lt Vl dass die Vielfh von λ als Nullstelle von μ_ϕ gleich $\mu_a(\phi, \lambda)$ ist. Dies wiederum bedeutet, dass

(b) Zeigen

alle N

Vielfa

Nullst.

Menge

anBord

FZOTZA

a_0, a_1, a_2

$\mathbb{C}[x]$ mit

$f = (x - \lambda$

(a) Sei

dass λ_1, λ

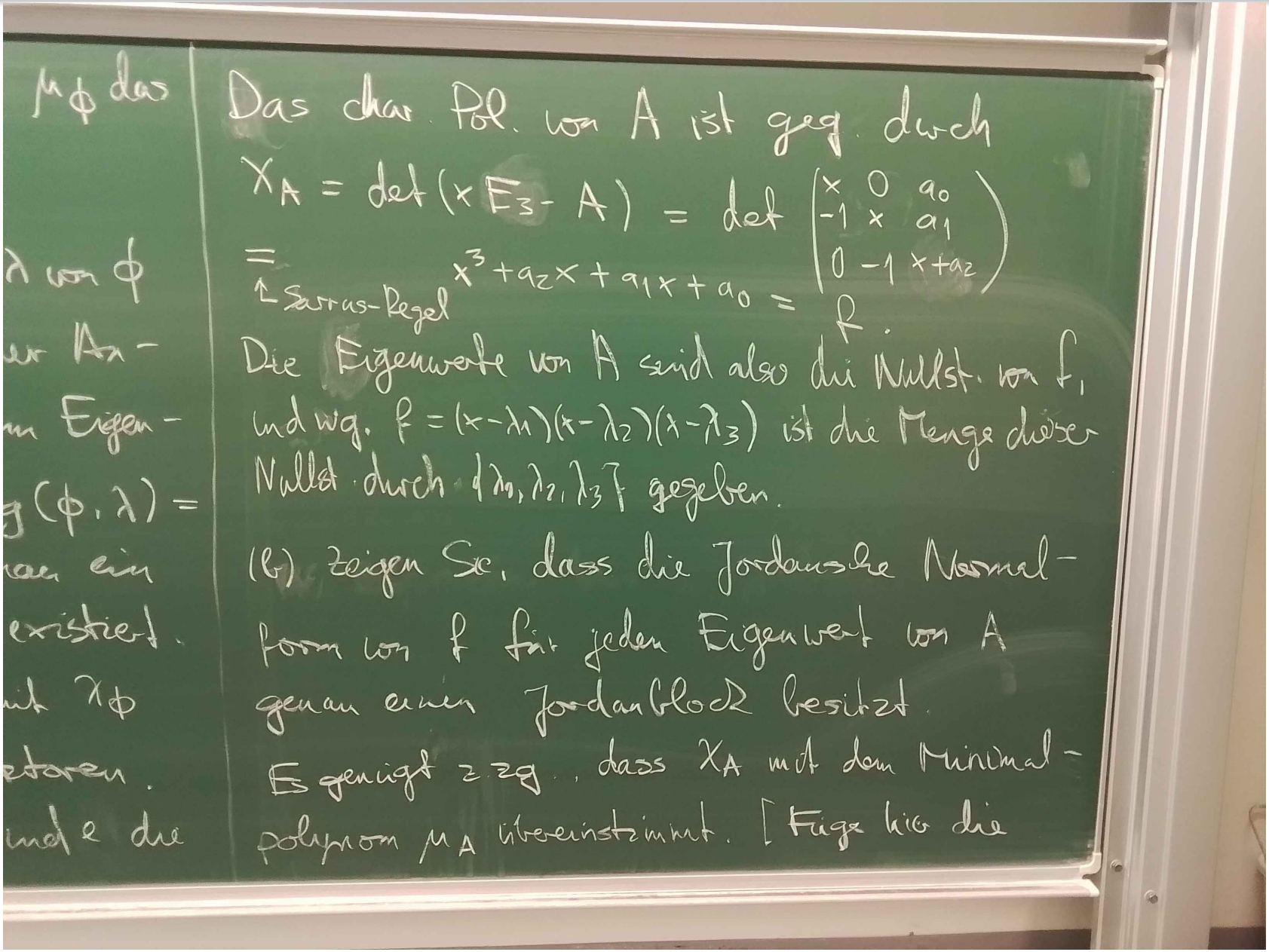
(b) Zeigen Sie, dass die Jordansche Normal-

alle Nullstellen von μ_ϕ und χ_ϕ dieselbe Vielfachheit haben (und die Menge der Nullst. beider Pol. ist jeweils gleich der Menge der Eigenw. von ϕ). Da μ_ϕ, χ_ϕ außerdem beide normiert sind, folgt $\mu_\phi = \chi_\phi$. □

F20TZA1 Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ und $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ die Koeff. des normierten Pol $f \in \mathbb{C}[x]$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als Nullst., d.h. es gelte

$$f = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} \in M_{3,\mathbb{C}}$. Zeigen Sie, dass $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von A sind



Korrektur 4. Zeile von unten:

„... Jordansche Normalform von A für ...“

$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Übung: F16T3A1

Argumentation aus der letzten Aufgabe ein, die den Zshg. zwischen den Größen der Jordanblöcke und der Vielf. der Nullstellen der Pol. verwendet]

dann: 1. Möglichkeit: Das Pol. A ist gleich der Begleitmatrix A_f des Polynoms f, und lt. Vl. gilt $\chi_{A_f} = \mu_{A_f} = f$ für jedes normierte Polynom $f \in K[x]$ vom Grad ≥ 1.

2 Möglichkeit: direkter Bew.

bekannt: $\mu_A \mid \chi_A \Rightarrow$ Es genügt z.zg: grad $\mu_A = 3$

Dafür reicht es z.zg: (E, A, A^2) ist linear unabh. Tupel in $M_{3,\mathbb{C}}$. denn. Wäre grad $\mu_A \leq 2$, dann gäbe es $b_0, b_1 \in \mathbb{C}$ mit $A^2 + b_1 A + b_0 E = 0$ oder $A + b_0 E = 0$, im Wider-

Ausformulierung des Anfangs von Teil (b)

„Es genügt zu zeigen, dass das Minimalpolynom μ_A mit dem charakteristischen Polynom χ_A übereinstimmt. Sei nämlich $J \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ eine zu A ähnliche Matrix in Jordanscher Normalform, λ ein Eigenwert von A und e die Vielfachheit von λ als Nullstelle von μ_A. Aus $\mu_A = \chi_A$ folgt $e = \mu_a(A, \lambda)$.

Laut Vorlesung ist e die Größe des größten Jordanblocks in J zum Eigenwert λ, und $\mu_a(A, \lambda)$ ist die Summe der Größen aller Jordanblöcke zu diesem Eigenwert. Aus der Gleichung $e = \mu_a(A, \lambda)$ folgt also, dass es nur einen Jordanblock zum Eigenwert λ in J gibt.“

Spach zu linearen Unabhängigkeit.

Seien also $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ mit $\alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 = 0$ (*)

z.zg.: $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

(*) $\rightarrow \alpha_0 E e_1 + \alpha_1 A e_1 + \alpha_2 A^2 e_1 = 0_{\mathbb{C}^3}$

$\Rightarrow \alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 A e_2 = 0_{\mathbb{C}^3}$

$\Rightarrow \alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 = 0_{\mathbb{C}^3} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ □

$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Übung: F16T3A1

Rechenaufgabe: H14T2A5

Definition der Gruppen- und Elementordnung

Definition

Sei G eine Gruppe.

- Die Anzahl $|G|$ der Elemente von G wird die Ordnung von G genannt.
- Ist $g \in G$ ein beliebiges Element, dann bezeichnen wir $\mathrm{ord}(g) = |\langle g \rangle|$ als die Ordnung von g.

Charakterisierung der Elementordnung

Satz

Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein beliebiges Element. Dann sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) $n = \mathrm{ord}(g)$

(ii) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $g^m = e_G$, und darüber hinaus ist n die minimale natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft.

(iii) Für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt $g^m = e_G$ genau dann, wenn m ein Vielfaches von n ist.

Beispiel: Elementordnungen in den symmetrischen Gruppen

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in S_n$.

(i) Ist σ ein k-Zykel ($2 \leq k \leq n$), dann gilt $\mathrm{ord}(\sigma) = k$.

(ii) Ist σ ein Element vom Zerlegungtyp $(k_1, ..., k_r)$, dann gilt $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{kgV}(k_1, ..., k_r)$.

H26T3AS

Sei q eine Primzahlpotenz > 1 und $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen.

(a) Zeigen Sie: Für alle $\alpha \in \mathbb{F}_q$ gilt die Gleichung $\alpha^q = \alpha$.

Lt. Vl ist $\mathbb{F}_q^\times = \mathbb{F}_q \setminus \{0_{\mathbb{F}_q}\}$ eine Gruppe mit $q-1$ Elementen. Da die Ordnung eines Gruppenelement $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ stets die Gruppenordnung teilt, ist $\operatorname{ord}(\alpha)$ ein Teiler von $q-1$,

und daraus folgt $\alpha^{q-1} = 1_{\mathbb{F}_q} \Rightarrow$

$\alpha^q = \alpha \cdot \alpha^{q-1} = \alpha \cdot 1_{\mathbb{F}_q} = \alpha$. Außerdem gilt $0^q_{\mathbb{F}_q} = 0_{\mathbb{F}_q}$.

(b) Sei $\varphi: \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ eine bel. Abbildung und $f \in \mathbb{F}_q[x]$ gegeben durch

$$f = \sum_{a \in \mathbb{F}_q} \varphi(a)\left(1 - (x-a)^{q-1}\right)$$

Zeigen Sie: $f(b) = \varphi(b) \quad \forall b \in \mathbb{F}_q$.

Aufgabe H26T3A5, Teil (b)

Sei $b \in \mathbb{F}_q$. Für jedes $a \in \mathbb{F}_q \setminus \{b\}$ gilt $b - a \in \mathbb{F}_q^\times$ und somit $\varphi(a)(1 - (b-a)^{q-1}) = \varphi(a)(1-1) = 0$. Dies bedeutet, dass in der Summe $f(b)$ höchstens ein Summand ungleich null ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{a \in \mathbb{F}_q} \varphi(a)(1 - (b-a)^{q-1}) \\ = \varphi(b)(1 - (b-b)^{q-1}) &= \varphi(b)(1 - 0^{q-1}) \\ = \varphi(b) \cdot 1 &= \varphi(b). \end{aligned}$$