H16T2A3 Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar?

(G) $K = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Das char. Pol von A ist $\chi_A = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$

$= x^2 + 1$. Dieses Pol. hat in $\mathbb{R}$ keine Nullst. $\Rightarrow$ χ_A zerfällt in $\mathbb{R}[x]$ nicht in Linearfaktoren $\Rightarrow$ A nicht über $\mathbb{R}$ (d.h. in $M_{2,\mathbb{R}}$) diagonalisierbar.

Bem. Über dem Körper $\mathbb{C}$ ist A diagonalisierbar. In $M_{2,\mathbb{C}}$ ist A ähnlich zu $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

(Übung)

(c) $K = \mathbb{F}_5$, $A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ -\bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}$

Es gilt $\chi_A = x^2 + \bar{1} = (x+\bar{2})(x+\bar{3})$, d.h. χ_A zerfällt über $\mathbb{F}_5$ in Linearfaktoren. Für jeden der beiden Eigenwerte $\lambda \in \{\bar{2}, \bar{3}\}$ gilt $1 \leq \mu_g(A,\lambda) \leq \mu_a(A,\lambda) = 1$, also $\mu_g(A,\lambda) = \mu_a(A,\lambda)$. Also ist A über $\mathbb{F}_5$ diagonalisierbar.

Übung: Bestimmen Sie eine Matrix $T \in GL_2(\mathbb{F}_5)$ mit $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}$.

(d) $K = \mathbb{R}(t) = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{R}[t],\ g \neq 0 \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & 1 \\ t-1 & 2t-1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-t-1 & -1 \\ 1-t & x-2t+1 \end{pmatrix} = (x-t-1)(x-2t+1)$$

$$-(1-t)(-1) = x^2 + (-3t)x + (t+1)(2t-1) + (-t) + 1$$

$$= x^2 + (-3t)x + 2t^2 + t - 1 + (-t) + 1$$

$$= x^2 + (-3t)x + 2t^2$$

Nach dem Wurzelsatz von Vieta.

gilt $\alpha+\beta = 3t$, $\alpha\beta = 2t^2$, falls α, β die Nullstellen von χ_A in K sind (evtl. mit Vielfachheiten). Gleichungen werden gelöst von $\alpha = t$, $\beta = 2t$. überprüfe: Tatsächlich gilt $\chi_A = (x-t)(x-2t)$.

$\Rightarrow$ χ_A zerfällt über K in Linearfaktoren

Da t und $2t$ beides einfache Nullst von χ_A sind, folgt wie unter (c), dass A über K diagonalisierbar ist. $\square$

H26T2A3 Für jedes $t \in \mathbb{Q}$ sei:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \in M_{2,\mathbb{Q}}.$$

(a) Berechnen Sie für jedes $t \in \mathbb{Q}$ das char. Pol. von A_t.

Für jedes $t \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\chi_{A_t} = \det(xE_2 - A_t) = \begin{pmatrix} x+t-1 & -t \\ t & x-t-1 \end{pmatrix}$$

$$= x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_t, für jedes $t \in \mathbb{Q}$.

Für jedes $t \in \mathbb{Q}$ ist 1 die einzige Null-

(d) Ze

Sei t

für al

Ind.-A

=

Ind.-sc

für n u

$\begin{pmatrix} 1-nt & n \\ -nt & 1+ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} t & x-t-1 \end{pmatrix}$

stelle von χ_{A_t}, also 1 der einzige Eigenwert von A_t.

(c) Untersuchen Sie, für welche $t \in \mathbb{Q}$ die Matrix A_t diagonalisierbar ist.

Für jedes $t \in \mathbb{Q}$ zerfällt χ_{A_t} in $\mathbb{Q}[x]$ in Linearfaktoren, siehe (a), und es gilt jeweils $\mu_a(A_t, 1) = 2$ für den einzigen Eigenwert 1.

Bestimme $\mu_g = \dim \mathrm{Eig}(A_t, 1)$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{Q}$.

$$A_t - 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -t & t \\ -t & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -t & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x-t-1$ $(-0+1+0+$

...k Eigen-

...t ∈ ℚ die

...ar ist.

...in ℚ[x] in

...gilt jeweils

...n Eigenwert 1.

...t, 1) in Ab-

$\begin{pmatrix} t & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Fall: $t = 0$ Dann zeigt die Rechnung

$rg(A_t - 1 \cdot E_2) = 0$ Dim-satz $\Rightarrow \mu_g(A_0, 1)$

$= \dim \ker(A_0 - 1 \cdot E_2) = 2 - rg(A_0 - 1 \cdot E_2)$

$= 2 = \mu_a(A_0, 1)$. Also ist die Matrix in diesem Fall diagonalisierbar.

2. Fall: $t \neq 0$ Dann gilt $rg(A_t - 1 \cdot E_2)$

$= rg \begin{pmatrix} -t & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ Dim-satz $\Rightarrow$

$\mu_g(A_t, 1) = 2 - 1 = 1 < \mu_a(A_t, 1)$

$\Rightarrow$ Für alle $t \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist A_t also nicht diagonalisierbar.

sei:

Q das

$+t-1 \quad -t$
$t \quad x-t-1$

weste von A_t

inzige Null-

(d) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $t \in \mathbb{Q}$.

$$A_t^n = \begin{pmatrix} 1-nt & nt \\ -nt & 1+nt \end{pmatrix}$$

Sei $t \in \mathbb{Q}$. Beweise die Gl. zunächst für alle $n \in \mathbb{N}_0$. durch vollst. Ind.

Ind.-Anf.: $A_t^0 = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1-0\cdot t & 0\cdot t \\ -0\cdot t & 1+0\cdot t \end{pmatrix}$

Ind.-schritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. setze die Gl. für n voraus. $\Rightarrow A_t^{n+1} = A_t^n \cdot A_t \overset{\text{Ind.-V.}}{=}$

$\begin{pmatrix} 1-nt & nt \\ -nt & 1+nt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(n+1)t & (n+1)t \\ -(n+1)t & 1+(n+1)t \end{pmatrix}$

noch z.Zg.: Gleichung gilt auch für negative ganze Zahlen. Sei also $r \in \mathbb{Z}$ mit $r < 0$

$\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}$ mit $r = -m$

Es gilt $\begin{pmatrix} 1-mt & mt \\ -mt & 1+mt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-(-m)t & (-m)t \\ -(-m)t & 1+(-m)t \end{pmatrix} \overset{(*_2)}{=} E_2$

$\Rightarrow A_t^r = A_t^{-m} = (A_t^m)^{-1} = \begin{pmatrix} 1-mt & mt \\ -mt & 1+mt \end{pmatrix}^{-1}$

$\overset{(*_2)}{=} \begin{pmatrix} 1-(-m)t & (-m)t \\ -(-m)t & 1+(-m)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-rt & rt \\ -rt & 1+rt \end{pmatrix}$

Das Minimalpolynom eines Endomorphismus

Definition

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$. Das Minimalpolynom μ_ϕ von ϕ ist das eindeutig bestimmte, normierte Polynom $f \in K[x]$ minimalen Grades mit der Eigenschaft $f(\phi) = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$.

Für eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ ist das Minimalpolynom μ_A das eindeutig bestmmte, normierte Polynom $f \in K[x]$ minimalen Grades mit $f(A) = 0_{\mathcal{M}_{n,K}}$.

Satz

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ist $f \in K[x]$ ein beliebiges Polynom mit $f(\phi) = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$, dann ist μ_ϕ ein Teiler von f in $K[x]$.

Einsetzen von Matrizen bzw. Endomorphismen in Polynome

K Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n,K}$, V ein n-dim. K-Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$

$$f = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 \in K[x]$$

$$f(A) = a_m A^m + \dots + a_1 A + a_0 E_n$$

z.B.: $f = x^k - 1 \Rightarrow f(A) = A^k - E$

$$f(\phi) = a_m \phi^m + \dots + a_1 \phi + a_0 \cdot \mathrm{id}_V$$

$$\phi^k = \underbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}_{k\text{-mal}}$$

Bew

und

nicht

z.B.:

χ_A =

M_A =

ander

gilt

Der Satz von Cayley-Hamilton

Satz

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ und χ_ϕ sein charakteristisches Polynom. Dann gilt $\chi_\phi(\phi) = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$.

- Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt, dass das Minimalpolynom μ_ϕ stets ein Teiler des charakteristischen Polnynoms χ_ϕ ist.
- Die Eigenwerte von ϕ sind genau die Nullstellen von μ_ϕ. (Diese Eigenschaft haben μ_ϕ und χ_ϕ also gemeinsam.)

Endomor –

, V ein

$\mathrm{End}_K(V)$

$\in K[x]$

$\cdot E_n$

$- E$

$+ a_0 \cdot \mathrm{id}_V$

Bem.: Im Allgemeinen brauchen μ_A und χ_A für eine Matrix $A \in M_{n,K}$ nicht übereinzustimmen.

z.B.: $A = E_2 \in M_{2,K}$ (Einheitsmatrix)

$\chi_A = \det(x \cdot E_2 - E_2) = (x-1)^2$

$\mu_A = x - 1$

andererseits: Für $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

gilt $\mu_J = \chi_J = (x-1)^2$

H26T1A5 Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p$, wobei p eine Primzahl bezeichnet. Sei $\alpha \in K$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,K}$.

(a) Zeigen Sie: $A^p = E$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$] Beh.: $\forall m \in \mathbb{N}: A^m = \begin{pmatrix} 1 & m\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

wird gezeigt durch vollst. Ind. (hier nicht ausgef.)

Aus der Beh. folgt insb. $A^p = \begin{pmatrix} 1 & p\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wegen $\mathrm{char}(K) = p$

gilt $p(x) = 0_K \Rightarrow A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

(b) Zeigen Sie, dass A im Fall $x \neq 0$ nicht diagonalisierbar ist.

$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-1 & -x \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1) \Rightarrow \chi_A$ zerfällt in $K[x]$ in Lin-

fakt., $\mu_a(A,1) = 2$, 1 einziger Eigenwert

$\operatorname{rg}(A - 1 \cdot E) = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$ für alle $x \in K \setminus \{0\}$.

Dim-Satz $\Rightarrow \mu_g(A,1) = \dim \ker(A - 1 \cdot E) = 2 - \operatorname{rk}(A - 1 \cdot E)$

$= 2 - 1 = 1 < \mu_a(A,1) \Rightarrow$ Matrix nicht diagonalisierbar

(c) Sei L ein algebraisch abg. Körper mit $\mathrm{char}(L) = 0$. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $B \in M_{n,L}$ mit $B^k = E$. Zeigen Sie, dass B über L diagonalisierbar ist.

Wegen $B^k - E$ ist B eine Nullstelle des Polynoms $f = x^k - 1$. Daraus folgt, dass M_B ein Teiler von $x^k - 1$ in $L[x]$ ist.