Definition der Bilinearformen

Satz

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(i) Eine Bilinearform auf V ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} \langle v, w_1 + w_2 \rangle &= \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle \ , \\ \langle v_1 + v_2, w \rangle &= \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \\ \text{und} \quad \langle \lambda v, w \rangle &= \langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

für alle $v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

(ii) Gilt außerdem $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ für alle $v, w \in V$, dann bezeichnet man die Bilinearform als symmetrisch.

(iii) Gilt darüber hinaus $\langle v, v \rangle > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0_V$, dann spricht man von einer positiv definiten Bilinearform.

(iv) Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einer positiv definiten Bilinearform wird auch als euklidischer Vektorraum bezeichnet.

F26T1AS Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform auf V ($\forall v, w \in V : \langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$) Es darf verwendet werden: $\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle \quad \forall v, w \in V$

(a) Zeigen Sie, dass $U = \{ v \in V \mid \langle v, v \rangle = 0 \}$ ein Untervektorraum von V ist.

zzg.: (i) $0_V \in U$ (ii) $\forall v, w \in U : v+w \in U$

(iii) $\forall v \in U, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda v \in U$

zu (iii) Sei $v \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle v, v \rangle = 0$

$\langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle = \lambda^2 \cdot 0$

$= 0 \rightarrow \lambda v \in U$

zu (i) $\langle 0_V, 0_V \rangle = \langle 0 \cdot 0_V, 0_V \rangle = 0 \cdot \langle 0_V, 0_V \rangle$

$= 0 \Rightarrow 0_V \in U$

zu (ii) Seien $v, w \in U \Rightarrow \langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 0$

$\langle v+w, v+w \rangle = \langle v, v+w \rangle + \langle w, v+w \rangle =$

$\langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle =$

$\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, w \rangle + \langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle v, w \rangle$

$= 2\langle v, w \rangle$ s.o. $\Rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle = 0 \cdot 0$

$\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 0$

$= 0 \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow \langle v + w, v + w \rangle = 2\langle v, w \rangle = 2 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow v + w \in U$

(b) Zeigen Sie, dass auf V/U eine wohldefinierte Bilinearform existiert gegeben durch $\langle v + U, w + U \rangle = \langle v, w \rangle \; \forall v, w \in V$, und dass diese ein Skalarprodukt auf V/U liefert.

Hinweis: Der Faktorraum V/U ist als Menge geg. durch Teilmengen von V der Form $v+U = \{v+u \mid u \in U\}$. Dabei gilt jeweils

$$v+U = w+U \iff w \in v+U \iff v \in w+U$$
$$\iff w-v \in U \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Die Vektoraddition und skalare Multiplikation auf V/U sind geg. durch $(v+U)+(w+U) = (v+w)+U$ und $\lambda \cdot (v+U) = \lambda v + U \quad \forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

zu überprüfen:

(1) Wohldefiniertheit:

$\forall v, v', w, w' \in V : v + U = v' + U$ und

$w + U = w' + U \Rightarrow \langle v + U, w + U \rangle =$

$\langle v' + U, w' + U \rangle$

(2) Bilinearität: $\forall v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$

und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(2.1) $\langle (v_1 + U) + (v_2 + U), w + U \rangle = \langle v_1 + U, w + U \rangle$

$+ \langle v_2 + U, w + U \rangle$

(2.2) $\langle \lambda (v + U), w + U \rangle = \lambda \langle v + U, w + U \rangle$

(3) Symmetrie: $\forall v, w \in V$:

$\langle v + U, w + U \rangle = \langle w + U, v + U \rangle$

(4) positive Definitheit:

$\forall v \in V: v+U \neq 0_{V/U} \Rightarrow$

$\langle v+U, v+U \rangle > 0$

zu (1) Seien $v, v', w, w' \in V$ mit

$v+U = v'+U$ und $w+U = w'+U$.

$\Rightarrow v' \in v+U,\ w' \in w+U \Rightarrow$

$\exists u, u' \in U$ mit $v' = v+u,\ w' = w+u'$

$\langle v'+U, w'+U \rangle = \langle v', w' \rangle =$

$\langle v+u, w+u' \rangle = \langle v, w+u \rangle + \langle u, w+u' \rangle$

$= \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle + \langle u, w \rangle + \langle u, u' \rangle$

Beh: $\langle v, u \rangle = \langle u, w \rangle = \langle u, u' \rangle = 0$

$u, u' \in U \Rightarrow \langle u, u \rangle = \langle u', u' \rangle = 0$

S.O. $\Rightarrow \langle v, u \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle \cdot 0$

$= 0 \Rightarrow \langle v, u \rangle = 0$ Der Nachweis für $\langle u, w \rangle$ und $\langle u, u' \rangle$ läuft analog.

also: $\langle v' + u, w' + u \rangle = \langle v', w' \rangle = \langle v, w \rangle + 0 =$

$\langle v, w \rangle = \langle v + u, w + u \rangle$.

(2.1) Seien $v_1, v_2, w \in V$.

$\langle (v_1 + u) + (v_2 + u), w + u \rangle =$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V ist Bilinearf.)

$\langle v_1 + v_2 + u, w + u \rangle = \langle v_1 + v_2, w \rangle =$

$\langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle = \langle v_1 + u, w + u \rangle +$

$\langle v_2 + u, w + u \rangle$ Der Nachweis von (2.2) und (3) läuft analog (besser ausführen!)

zu (4) Sei $v \in V$ mit $v+U \neq 0_{V/U}$.

zzg.: $\langle v+U, v+U \rangle > 0$.

Es gilt $\langle v+U, v+U \rangle = \langle v, v \rangle \geq 0$,

da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V positiv semidefinit ist. Ang. $\langle v+U, v+U \rangle = 0$.

$\Rightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v \in U \rightarrow$

$v \in 0_V + U \Rightarrow v+U = 0_V + U = 0_{V/U}$

↯ zur Annahme. □

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$, also eine lineare Abbildung $V \to V$. Man bezeichnet ein Element $\lambda \in K$ als Eigenwert von ϕ, wenn ein Vektor $v \in V$ mit $v \neq 0_V$ und $\phi(v) = \lambda v$ existiert. Ein solcher Vektor v wird Eigenvektor zum Eigenwert λ genannt.

Definition

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$. Für jede $\lambda \in K$ ist

$$\mathrm{Eig}(\phi, \lambda) \quad = \quad \{v \in V \mid \phi(v) = \lambda v\}$$

ein Untervektorraum von V, der sog. Eigenraum zum Eigenwert λ.

Eigenwerte und charakteristisches Polynom

Definition

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$. Sei $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ eine Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich einer beliebigen Basis von V (wobei $n = \dim V$ ist). Dann nennt man

$$\chi_\phi \quad = \quad \det(xE_n - A) \in K[x]$$

das charakteristische Polynom der Matrix A.

Erinnerung:

Die Eigenwerte von ϕ sind genau die Nullstellen von χ_ϕ.

Bsp. für eine Darstellungsmatrix:

Betrachte $\mathbb{C}$ als 2-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beh: $\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto (2+5i)z$ ist ein Endomorphismus dieses $\mathbb{R}$-Vektorraums.

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$\phi(z+w) = (2+5i)(z+w) = (2+5i)z + (2+5i)w = \phi(z) + \phi(w)$ und $\phi(az) = (2+5i)az = a \cdot (2+5i)z = a\phi(z)$

($\Rightarrow$ Beh.)

bekannt: $(1, i)$ ist geordnete Basis dieses $\mathbb{R}$-VR.

Vorgehen: Wende ϕ auf die Basisel. an, stelle die Bilder wieder als Linearkomb. der Basis dar. Die Koeff. liefern jeweils eine Spalte der Darst.-matrix.

$$\phi(1) = (2+5i) \cdot 1 = 2+5i = \underline{\underline{2}} \cdot 1 + \underline{\underline{5}} \cdot i$$

$$\phi(i) = (2+5i) \cdot i = 2i - 5 = \underline{\underline{(-5)}} \cdot 1 + \underline{\underline{2}} \cdot i$$

$$\Rightarrow M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Übung Betrachte auf $V = M_{2,\mathbb{R}}$ die Abb. $\phi : V \to V, X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X$.

(a) Zeigen Sie: $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$

(b) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}(\phi)$, wobei $\mathcal{B} = (B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22})$ die Basis bestehend aus den Basismatrizen in $M_{2,\mathbb{R}}$ bezeichnet.

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom, Vielfachheiten von Eigenwerten

Definition

Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von ϕ.

- Die algebraische Vielfachheit $\mu_a(\phi, \lambda)$ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_ϕ.
- Die geometrische Vielfachheit $\mu_g(\phi, \lambda)$ ist die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$.

Das Diagonalisierbarkeitskriterium

Definition

Man bezeichnet $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ als diagonalisierbar, wenn ϕ bezüglich einer geordneten Basis von V eine Diagonalmatrix als Darstellungsmatrix besitzt.

Satz

Ein Endomorphismus $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn χ_ϕ in $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt und $\mu_g(\phi, \lambda) = \mu_a(\phi, \lambda)$ für jeden Eigenwert λ von ϕ gilt.

Erinnerung: $A \in M_{n,K}$ diagonalisierbar ($n \in \mathbb{N}$, K Körper) $\Rightarrow$ Es gibt eine Diagonalmatrix $D \in M_{n,K}$ und ein $T \in GL_n(K)$ mit $D = TAT^{-1}$ (m.a.W. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix)

H16T2A3 Untersuchen Sie, welche der folgenden Matrizen $A \in M_{n,K}$ jeweils diagonalisierbar sind.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $(n=3,\ K=\mathbb{C})$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $(n=2,\ K=\mathbb{R})$ (c) $A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ -\bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$ $(n=2,\ K=\mathbb{F}_5)$

(d) $A = \begin{pmatrix} t+1 & 1 \\ t-1 & 2t-1 \end{pmatrix}$ $(n=2,\ K=\mathbb{R}(t)$ rationaler Fkt.-körp.$)$

zu (a) $\chi_A = \det(xE_3 - A) = \begin{pmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix}$

$= (x-2)^3 \Rightarrow$ 2 einziger Eigenwert von A, es gilt $\mu_a(A,2) = 3$

Offenbar zerfällt χ_A über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren

Es gilt $\mu_g(A,2) = \dim \mathrm{Eig}(A,2) =$

$\dim \ker(A-2E_3) = 3 - \mathrm{rg}(A-2E_3)$

↑ Dim-Satz

$A-2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A-2E_3) = 1$

$\Rightarrow \mu_g(A,2) = 3-1 = 2 < \mu_a(A,2)$

$\Rightarrow$ A ist <u>nicht</u> diagonalisierbar über $\mathbb{C}$

Thema der Dienstagsstunde:

F24T3A1(a), H18T3A1

heute: H21T1A2 (Bilinearformen)

F16T2A5

bespreche nächste Stunde:

H26T1A5, H26T2A3